TEMAS DE MATEMÁTICAS

Teoría de conjuntos

para estudiantes de ciencias

José Alfredo Amor Montaño

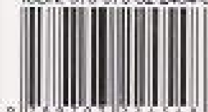


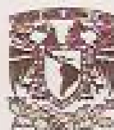
Este libro surgió de la experiencia docente del autor en la impartición de cursos de Teoría de conjuntos en la Facultad de Ciencias de la UNAM. Fue escrito con la intención de que sea usado como texto introductorio a la teoría de conjuntos. Está dirigido a estudiantes del área científica y también a estudiantes de filosofía interesados en la teoría de conjuntos como fundamento de la matemática. Es un texto introductorio en que los conceptos se presentan con rigor matemático, en lenguaje preciso y haciendo la distinción entre clases o colecciones y conjuntos.

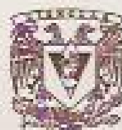
La introducción desarrolla de forma intuitiva pero muy rigurosa el concepto de conjunto, diferenciándolo del concepto de clase o colección determinada por una propiedad, ya que en realidad todo conjunto es una colección o clase pero no toda colección o clase es un conjunto. También se aclaran algunos prejuicios sobre el concepto de conjunto. Los principales temas tratados son: 1. Álgebra de conjuntos (se generalizan el Principio de Inducción Matemática, el Principio del Buen Orden, así como las relaciones entre ellos). 2. La construcción de los números naturales (se prueban los axiomas de Peano y el Teorema de Recursión para números naturales). 3. Aritmética cardinal transfinita. 4. El Axioma de Elección con más de diez versiones equivalentes (se prueban el Lema de Zorn y el Teorema del Buen Orden).

Agradezco a todos mis alumnos pues me permitieron disfrutar esa extraordinaria sensación de enseñarles teoría de conjuntos y compartirla con todos. Invito a los lectores a aventurarse en esta teoría tan básica y poderosa como para fundamentar a casi toda la matemática, y tan elegante y rica como para que Hilbert la llamara el paraíso que Cantor creó para nosotros .

José Alfredo Amor Montaño


ISBN: 978-970-32-2454-8





José Alfredo Amor Montaño

Nació en la Ciudad de México en 1946. Estudió la carrera de matemáticas en la Facultad de Ciencias de la UNAM y obtuvo la maestría en Filosofía de la Ciencia (matemáticas) en la UAM Iztapalapa. Fue doctor en filosofía de la ciencia por el Instituto de Investigaciones Filosóficas y la Facultad de Filosofía y Letras de la UNAM, por lo que recibió la medalla Alfonso Caso. Su tesis doctoral recibió el premio Sverdlin 2001.

Hasta el momento de su muerte, en abril de 2011, fue Profesor Titular "B" de tiempo completo del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM, donde impartió cátedra desde 1974. Su actividad docente incluyó también clases de maestría en filosofía de la ciencia en la UAM Iztapalapa y en la maestría en inteligencia artificial en la Fundación Arturo Rosenblueth.

Las áreas de trabajo del Dr. José Alfredo Amor fueron: teoría de conjuntos, lógica matemática, lógica y computación; y, dentro de esta última: programación lógica, demostración automática de teoremas y lógicas en inteligencia artificial.

A lo largo de su vida profesional dirigió 22 tesis de licenciatura y maestría y publicó 36 trabajos en diferentes revistas y memorias de congresos y coloquios; asimismo impartió múltiples conferencias. Se le otorgó la beca CONACyT para estudios de maestría; perteneció al Programa de Estímulos a la Productividad y al Rendimiento del Personal Académico, así como al Programa de Fomento a la Docencia para Profesores de Carrera.

José Alfredo Amor Montaño

TEORÍA DE CONJUNTOS PARA ESTUDIANTES DE CIENCIAS

FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM
2011



Amor Montaño, José Alfredo.
Teoría de conjuntos para estudiantes de ciencias / José Alfredo Amor Montaño. -- 2a ed., reimp. -- México : UNAM, Facultad de Ciencias, 2011.
viii, 117 p. ; 22 cm. -- (Las prensas de ciencias) (Temas de matemáticas)
Bibliografía: p. 117
ISBN 978-970-32-2454-8

1. Teoría de los conjuntos. 2. Lógica simbólica y matemática. I. Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de Ciencias. II. t. III. Ser. IV. Ser.

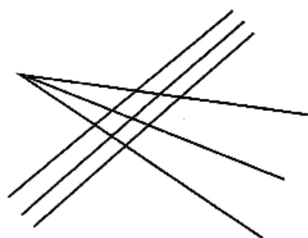
511.322-scdd20 Biblioteca Nacional de México

Teoría de conjuntos para estudiantes de ciencias
2ª edición, 2005
1ª reimpresión, 2008
2ª reimpresión, 2 de agosto de 2011

ISBN: 978-970-32-2454-8

Diseño de portada: Laura Uribe.

A Judith Márquez Guzmán



Prefacio

Este libro fue escrito pensando en ser usado como un texto introductorio a la teoría de conjuntos, para estudiantes de ciencias. Sin embargo el hecho de que sea introductorio no significa que sea fácil ya que los conceptos se presentan con todo el rigor moderno, en un lenguaje preciso y haciendo la distinción entre colección (determinada por una propiedad) y conjunto.

Este texto nació de las notas de clase de un curso de Teoría de Conjuntos I impartido por el autor en la Facultad de Ciencias de la UNAM a un grupo de 18 excelentes estudiantes de matemáticas y física en 1993. Este material ya organizado y revisado por el autor, fue escrito en Scientific Word para lo cual se contó con la valiosa colaboración de Favio Miranda. El texto fue usado y nuevamente revisado y ampliado, en otro curso de Teoría de Conjuntos impartido en 1995. El resultado es el presente texto.

La introducción es un desarrollo muy intuitivo pero muy riguroso del concepto de conjunto, diferenciándolo del concepto de colección o clase determinada por una propiedad, ya que todo conjunto es una colección o clase pero no a la inversa. También se aclaran algunos prejuicios sobre el concepto de conjunto; se precisa el concepto constructivo de conjunto y se dan algunos teoremas básicos por ejemplo, que la colección de todos los conjuntos **no** es un conjunto.

En el capítulo uno se desarrolla el álgebra de conjuntos: par ordenado, relaciones, particiones y funciones. Órdenes parciales, totales y buenos; conjuntos bien fundados y conjuntos con inducción fuerte. Se dan relaciones entre estos conceptos generales, por ejemplo un conjunto con una relación, es bien fundado si y sólo si cumple inducción fuerte. Esto generaliza la relación entre el Principio de Inducción Matemática y el principio del Buen Orden.

El capítulo dos contiene la construcción de los números naturales, de

dos maneras, con el objeto de definirlos de un modo natural y probar su existencia de un modo general. Se prueban los axiomas de Peano; el Teorema de Recursión para números naturales es la parte central de este capítulo, que incluye otras caracterizaciones de los naturales y su aritmética.

En el capítulo tres se presenta la aritmética cardinal transfinita a partir de los conceptos de equipotencia y de dominancia; el Teorema de Cantor, la relación entre finitos, infinitos, Dedekind-infinitos y el Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein. Quedan abiertas tres preguntas que requieren del Axioma de Elección.

El capítulo cuatro está dedicado al Axioma de Elección, se presentan diez equivalentes y se resuelven las tres preguntas pendientes del capítulo tres: la dominancia es relación total, todo conjunto infinito es Dedekind-infinito y tiene un subconjunto numerable y para todo cardinal infinito k, $k \cdot k = k$. Se ve más aritmética cardinal, se prueban el Lema de Zorn y el Teorema del Buen Orden y termina con una aplicación y otras versiones del Axioma de Elección muy usadas en muy diferentes ramas de las matemáticas.

Todos los capítulos tienen variados ejercicios, algunos con sugerencias.

Agradezco a mis alumnos de los dos cursos mencionados pues me permitieron tener esa extraordinaria sensación de enseñarles teoría de conjuntos y compartirla con ellos. Agradezco el apoyo de Fundación UNAM para la mitad del proyecto y quiero agradecer especialmente a Favio Miranda Perea su valiosa colaboración, ya que él fue alumno en 1993 y profesor junto conmigo en 1995 y sin él este texto no se hubiera podido realizar como se pensó. Para la segunda impresión de este libro se agregaron algunos comentarios y detalles de definiciones, ejemplos y demostraciones, que complementan el original, para lo cual conté con la valiosa colaboración de Mariana Martínez González quien corrigió las erratas encontradas y elaboró el complemento en LaTex.

Contenido

INTRODUCCIÓN 1

0.1 Aclaraciones sobre el concepto de conjunto . . . 7

0.2 Construcción de conjuntos . . . 9

0.3 El conjunto universo local . . . 13

1 ÁLGEBRA DE CONJUNTOS 18

1.1 Par ordenado . . . 19

1.2 Relaciones . . . 20

1.3 Órdenes parciales, totales y buenos; conjuntos bien fundados e inducción fuerte. Particiones . . . 21

1.4 Funciones . . . 24

2 LOS NÚMEROS NATURALES, INDUCCIÓN Y RECURSIÓN 28

2.1 Los números naturales . . . 29

2.2 El teorema de recursión para números naturales . . . 43

2.3 Sistemas de peano . . . 50

2.3.1. Unicidad de sistemas de Peano . . . 53

2.4 Aritmética en los naturales . . . 55

2.5 Variantes del teorema de recursión . . . 56

3 EQUIPOTENCIA, FINITUD, DOMINANCIA Y ARITMÉTICA CARDINAL **61**

3.1 EQUIPOTENCIA 61

3.2 FINITUD 68

3.2.1 OTRAS PROPIEDADES DE FINITOS 71

3.2.2. DEFINICIONES ALTERNATIVAS DE FINITUD . . 74

3.3 DOMINANCIA 78

3.4 ARITMÉTICA CARDINAL 82

4 EL AXIOMA DE ELECCIÓN **92**

4.1 ALGUNOS EQUIVALENTES DEL AXIOMA DE ELECCIÓN (AE) 95

4.2 MÁS ARITMÉTICA CARDINAL 106

4.3 UNA APLICACIÓN DEL LEMA DE ZORN 114

BIBLIOGRAFÍA **117**

Introducción

Un conjunto es una colección de objetos considerada como un todo; es decir, considerada como una unidad. Brevemente, podemos decir que un conjunto es una multiplicidad considerada como una unidad.

Los objetos que pertenecen a un conjunto se llaman sus elementos y estos pueden ser cualquier tipo de objetos que no sean colecciones o bien pueden ser conjuntos.

Con la palabra "objeto", nos referimos a los objetos de estudio de la Teoría de Conjuntos (T.C.).

Los objetos de estudio de la T.C. quedan intuitivamente descritos con las siguientes ideas:

1. Si x no tiene elementos, entonces x es un objeto de la T.C.

2. Si x es un conjunto, entonces x es un objeto de la T.C.

3. Los únicos objetos de la T.C. son los descritos en 1 y 2.

Una parte fundamental en el estudio de una teoría cualquiera, es el lenguaje de esa teoría y en la teoría de conjuntos en particular, esto es muy importante, por lo que daremos una descripción intuitiva de su lenguaje como usualmente se presenta en la actualidad:

El lenguaje de la T.C. es un lenguaje de predicados que tiene como símbolos lógicos a los siguientes: no ($\neg$); y ($\wedge$); o ($\vee$); si... entonces... ($\Rightarrow$); si y sólo si ($\Leftrightarrow$); para todo ($\forall$); existe ($\exists$); símbolo de identidad ($=$); variables individuales ($x_1, x_2, x_3,...$). El lenguaje tiene como símbolo de predicado de dos argumentos al símbolo de pertenencia ($\in$).

En el lenguaje de la T.C., las variables x_1, x_2, x_3,...., que comúnmente denotamos x, y, z,...., varían sobre los objetos de la T.C.. La relación binaria que interpreta al símbolo de pertenencia es una relación que se aplica entre objetos de la T.C.. Así pues, las únicas afirmaciones simples del lenguaje son de dos tipos, la igualdad $x = y$ y la pertenencia $x \in y$.

Una propiedad es una afirmación en el lenguaje de la T.C. que se refiere obviamente a objetos de la T.C.; por ejemplo "$\exists y\,(y \in x)$"es una propiedad que se refiere al objeto x, y que significa que x tiene al menos un elemento.

Todo conjunto está determinado por una propiedad; es decir, para todo conjunto A, hay una propiedad, digamos P, tal que:

$$x \in A \Leftrightarrow x \text{ cumple } P.$$

Con esta idea, denotamos o abreviamos A, como:

$$\{x \mid x \text{ cumple } P\}$$

lo cual se lee: la colección de objetos x tales que x cumple la propiedad P.

Para tener algunos ejemplos, denotemos con $\emptyset$ a un conjunto que no tiene elementos y denotemos con $\{a, b\}$ a un conjunto cuyos elementos son exactamente los objetos a y b. Ejemplos de conjuntos caracterizados por una propiedad son:

1. $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$, es una abreviatura para la caracterización:

$$x \in \emptyset \Leftrightarrow x \neq x.$$

   La propiedad es $x \neq x$.

2. $\{a, b\} = \{x \mid x = a \vee x = b\}$, es una abreviatura para la caracterización:

$$x \in \{a, b\} \Leftrightarrow (x = a \vee x = b).$$

La propiedad en este caso es $(x = a \vee x = b)$.

Así, en general, si B es un conjunto (es decir, suponiendo ya, que B es conjunto), la propiedad acerca objetos de la T.C. que determina a B es la propiedad "$x \in B$", es decir:

$$B = \{x \mid x \in B\}.$$

Ahora bien, si P es una propiedad cualquiera (acerca de objetos de la T.C.), la notación:

$$\{x \mid x \text{ cumple } P\}$$

es usualmente conocida como la colección o clase de todos los objetos que cumplen la propiedad P; es decir, es la colección o clase determinada por la propiedad P.

Veamos otros ejemplos:

3. Si P es la propiedad "$x = x$", entonces $\{x \mid x = x\}$ representa la colección o clase de todos los objetos x de la T.C. que cumplen $x = x$; es decir, representa a la colección o clase de todos los objetos de la T.C..

4. Si P es la propiedad "$x \in y$" donde y es un objeto fijo de la T.C. entonces $\{x \mid x \in y\}$ representa la colección o clase de todos los objetos que pertenecen al objeto fijo y. En este caso, si y tiene elementos, la colección anterior representa al mismo objeto fijo y. Si y no tiene elementos, la colección anterior representa al objeto $\emptyset$ dado antes, ya que en este caso particular, para cualquier x se cumple:

$$x \in y \Leftrightarrow (x \neq x)$$

pues y no tiene elementos.

Nótese en este último caso que si y es el conjunto vacío entonces no tiene elementos y

$$\{x \mid x \in y\} = y = \emptyset,$$

pero si y no tiene elementos, no necesariamente es el conjunto vacío pues es posible que sea un objeto que no sea conjunto y

$$\{x \mid x \in y\} = \emptyset \neq y.$$

Así pues, ser vacío y no tener elementos no son conceptos equivalentes si se permite la posibilidad de que existan objetos que no sean conjuntos.

5. Si P es la propiedad "$x \neq x$", ésta determina a la colección $\{x \mid x \neq x\}$ que representa a una colección que no tiene objetos la cual es el conjunto $\emptyset$.

6. Si P es la propiedad "$x = a \vee x = b$", entonces $\{x \mid x = a \vee x = b\}$ representa a la colección que tiene a los objetos a y b y nada más. Tal es el conjunto denotado $\{a, b\}$.

Una colección o clase es pues, un modo de referirnos a todos los objetos que cumplen una propiedad. Así pues, si

$$C = \{x \mid x \text{ cumple la propiedad } P\ \}$$

entonces, el decir "$x \in C$" únicamente es un modo de decir "x cumple la propiedad P."

Si C es un conjunto, entonces "$x \in C$" es una afirmación del lenguaje de la T.C. Si C no es un conjunto, entonces "$x \in C$"no es una afirmación del lenguaje, sino un abuso de él, para abreviar: "x cumple la propiedad P."

Con este modo de hablar para referirnos a $\{\ x \mid x \text{ cumple } P\ \}$, podemos decir entonces de acuerdo a lo aclarado al principio, que todo conjunto es una colección o clase de objetos de la T.C. determinada por una propiedad. De aquí no se sigue necesariamente la afirmación inversa, de que toda colección o clase de objetos determinada por una propiedad, sea un conjunto.

El concepto ingenuo de conjunto, consiste en considerar que toda colección o clase determinada por una propiedad, sea un conjunto; es decir: "para cualquier propiedad P, $\{x \mid x \text{ cumple } P\}$ es un conjunto", o bien, dicho en el lenguaje de T.C. y llamando A a la colección de los x que cumplen P, considerar que: "para cualquier propiedad P, $\exists A \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \text{ cumple } P)$."

Tal concepto es muy "intuitivo", claro y útil, por ejemplo:

$$\begin{aligned}
\emptyset &= \{x \mid x \neq x\} \\
\{a, b\} &= \{x \mid x = a \vee x = b\} \\
a \cup b &= \{x \mid x \in a \vee x \in b\} \\
a^c &= \{x \mid x \notin a\} \\
a \cap b &= \{x \mid x \in a \wedge x \in b\} \\
P(a) &= \{x \mid \forall y\, (y \in x \Rightarrow y \in a)\} \\
\{a\} &= \{x \mid x = a\}
\end{aligned}$$

Ahora bien, si consideramos a la colección $B = \{x \mid x \notin x\}$, que abrevia $x \in B \Leftrightarrow x \notin x$, B está determinada por la propiedad "$x \notin x$"(no pertenecer a sí mismo), ¿es B un conjunto?

La noción ingenua dice que sí. Sin embargo, si B fuera un conjunto entonces tiene sentido preguntarse si $B \in B$ o si $B \notin B$.

Si $B \in B$ entonces $B \notin B$. Pero, si $B \notin B$ entonces $B \in B$ de donde necesariamente $B \in B$ y $B \notin B$. Lo cual es absurdo. De aquí que B no es un conjunto. ¿Pero por qué sucede esto? ¿por qué razón este concepto de conjunto tan "intuitivo", tan claro y tan útil, es inconsistente?

Obsérvese que si $B = \{x \mid x \notin x\}$ entonces $\forall x\, (x \in B \Leftrightarrow x \notin x)$.

Sucede que hay una verdad lógica que niega la existencia de tal conjunto B y que de hecho niega el principio del concepto ingenuo de conjunto.

Una verdad lógica, es una afirmación que es verdad en todos los casos posibles; es decir, es verdad independientemente del universo de variación de las variables e independientemente de las relaciones involucradas en ella. La verdad lógica a la que nos referimos anteriormente, es la siguiente:

"En cualquier universo de individuos y para cualquier relación binaria entre individuos de ese universo, no hay ahí, en ese universo, un individuo que tenga esa relación con todos los individuos de ese universo, que no tengan esa relación consigo mismos y sólo con esos."

Simbólicamente, la verdad lógica anterior, se puede representar como sigue, si R denota la relación binaria cualquiera sobre el universo cualquiera, entonces:

$$\neg\exists y\forall x(xRy \Leftrightarrow \neg(xRx))$$

Es fácil probar, por reducción al absurdo, que tal afirmación debe ser necesariamente verdadera en cualquier interpretación, para cualquier universo y para cualquier relación R. En particular, si el universo es el de los conjuntos y la relación que interpreta a R es la relación de pertenencia , tenemos entonces que:

$$\neg\exists y\forall x(x \in y \Leftrightarrow x \notin x)$$

Pero recuérdese que $\forall x(x \in B \Leftrightarrow x \notin x)$, de donde la verdad lógica mencionada nos garantiza que: no existe B en el universo de los conjuntos. Es decir, B no es un conjunto.

Compárese nuevamente el principio de la teoría ingenua de los conjuntos para la propiedad $x \notin x$ con la verdad lógica en el caso de los conjuntos y la relación de pertenencia.

$\exists y\forall x(x \in y \Leftrightarrow x \notin x)$ Principio de la teoría ingenua, para $P = x \notin x$.

$\neg\exists y\forall x(x \in y \Leftrightarrow x \notin x)$ Verdad lógica.

Queda entonces claro por qué la teoría ingenua de conjuntos, tan intuitiva, clara y útil, es inconsistente ¡porque contradice a una verdad lógica!. No es un problema teórico conjuntista.

Es sólo un problema de la intuición que contradice una verdad de la lógica clásica elemental.

Por todo lo anterior, podemos concluir que todo conjunto es una clase, pero no toda clase es un conjunto.

0.1 ACLARACIONES SOBRE EL CONCEPTO DE CONJUNTO

En lo que sigue, haremos la aclaración de algunos prejuicios sobre el concepto de conjunto.

1) El concepto aislado de "elemento"no tiene sentido pues no significa nada realmente, por lo que no debe existir la confusa división de objetos de la teoría de conjuntos, en conjuntos y elementos. La clasificación que podríamos hacer de los objetos de la teoría de conjuntos es: conjuntos y no conjuntos. El primer concepto intuitivo básico es el de conjunto y el segundo es la relación de pertenencia o de "ser elemento de". A los objetos que forman un conjunto, los llamamos elementos de ese conjunto. "Ser elemento de" es una relación de dos argumentos, también llamada "pertenencia"de un objeto a otro, donde el segundo objeto es un conjunto y el primero puede o no ser conjunto. Así pues, ser elemento de, es una relación y no una propiedad.

2) Un conjunto puede tener como elementos suyos a conjuntos; de hecho un conjunto puede tener solamente a conjuntos como sus elementos, ya que los objetos que pertenecen a un conjunto pueden ser cualquier tipo de objeto de la T.C., en particular conjuntos. Debe observarse que cualquier conjunto es elemento de otro conjunto, por ejemplo, del conjunto unitario que lo tiene a él como su único elemento.

Si A es un conjunto, entonces $\{A\}$ denota al conjunto cuyo único elemento es A y $A \in \{A\}$. El conjunto $\{A\}$ se llama el unitario de A.

3) Si A es un conjunto, $A \in A$ no es un concepto contradictorio. Análogamente $A \notin A$ no es contradictorio. La afirmación $A \in A$ significa que A es un elemento de A, lo cual puede suceder, si $A = \{A\}$. La afirmación $A \notin A$ significa que A no es elemento de A, es decir, que no es elemento de sí mismo; esto sucede por ejemplo con $\emptyset$ ya que $\emptyset \notin \emptyset$. ¿Hay conjuntos A tales que $A \in A$? No se puede dar una respuesta definitiva, pues ello depende de la teoría de conjuntos de que se trate, pero sí podemos dar una respuesta parcial muy precisa e importante; una

respuesta parcial es que: es consistente suponer que los haya; es decir, con la suposición de que existan no se llega a contradicción alguna. La siguiente es una representación informal e intuitiva de un conjunto con esta propiedad:

$$A = \{\{\{\{......\}\}\}\}$$

Este es un conjunto, cuyo único elemento es un conjunto, cuyo único elemento es un conjunto, cuyo único...

Así $A \in A$. Desde luego, también es consistente suponer que no los haya; es decir, suponiendo que no los hay no se llega a contradicción alguna.

4) Si x, w son objetos de la T.C., entonces el hecho de afirmar que $x \in w$ es cierto, presupone necesariamente que w es un conjunto, pero x puede ser o puede no ser un conjunto. Es posible que se esté abusando del lenguaje y que w sea una clase que no es conjunto; entonces, si $w = \{z \mid z \text{ cumple } P\}$, es decir, si P es una propiedad que determina a w, entonces "$x \in w$"es simplemente un abuso de lenguaje que abrevia la afirmación "x cumple P."

5) Formalizar aclarando el lenguaje y precisar los enunciados básicos o axiomas de la teoría de conjuntos, no necesariamente la vuelve anti-intuitiva; al contrario, pues al precisar el lenguaje y las suposiciones iniciales acerca de los conjuntos, se tiene más claro el concepto de conjunto y se precisa con todo rigor lo que se afirma y lo que se prueba evitándose ambigüedades y confusiones acerca de una teoría tan básica y tan poderosa como lo es la teoría de conjuntos.

6) La idea ingenua de conjunto es una idea equivocada por ser contradictoria con la lógica elemental, pues confunde el concepto de conjunto con el de clase o colección determinada por una propiedad. El concepto correcto de conjunto se adquiere al dejar establecido cómo construimos conjuntos.

Las respuestas naturales a la pregunta ¿cómo construimos conjuntos?

serán una serie de procedimientos constructivos mentales con los cuales formamos conjuntos; estos procedimientos serán tomados como los axiomas constructivos de la teoría. Otros axiomas no constructivos serán los que nos especifiquen propiedades fundamentales acerca del concepto de conjunto; así, la definición rigurosa de conjunto queda dada por los axiomas de la teoría y por el concepto constructivo de conjunto.

0.2 Construcción de conjuntos

Un conjunto que podemos construir sin usar objetos en lo absoluto es el conjunto que no tiene elementos o conjunto vacío, al cual denotamos con $\emptyset$. (Axioma del Conjunto Vacío).

Ahora bien, dados dos objetos (conjuntos o no) A y B, podemos construir el conjunto cuyos elementos son exactamente esos, al cual denotamos como $\{A, B\}$ y lo llamamos el par de A y B. (Axioma del Par). También podemos construir el conjunto cuyo único elemento es A al cual denotamos como $\{A\}$ y lo llamamos el unitario de A (caso particular del Axioma del Par con $A = B$). En general para cualquier número finito de objetos $A_1, A_2, ..., A_n$ construimos el conjunto

$$\{A_1, A_2, ..., A_n\}$$

cuyos elementos son exactamente esos.

Si x, y *son conjuntos*, decimos que x es un subconjunto de y si todo elemento de x es elemento de y y esto lo denotamos $x \subseteq y$, en el lenguaje de la T.C. esto lo decimos así:

$$\forall z(z \in x \Rightarrow z \in y)$$

en tal caso decimos también que x está incluido en y, o que x está contenido en y. Por ejemplo:

$$\{A\} \subseteq \{A, B\} \text{ , } \emptyset \subseteq \{A\}$$
$$\emptyset \subseteq X, \text{cualquiera que sea el conjunto } X.$$

Los objetos x y y son iguales si son el mismo objeto y esto lo denotamos con $x = y$. Con $x \neq y$ denotamos que no son el mismo. Como se ha visto, lo único que interesa de los conjuntos son sus elementos, así que si dos conjuntos tienen los mismos elementos, entonces serán iguales como conjuntos. Así, si x y y son conjuntos, $x = y$ significa que x y y son el mismo conjunto, es decir, que tienen los mismos elementos: todo elemento de x es elemento de y y todo elemento de y es elemento de x; por lo tanto si x y y son conjuntos, entonces $x = y$ significa $x \subseteq y$ y $y \subseteq x$. (Axioma de Extensionalidad). Por ejemplo:

$$\{A, B\} = \{B, A\},\ \{A\} = \{A, A\},\ \{3, 4\} = \{3 + 1, 5 - 2\}$$
$$\emptyset \neq \{A\},\ \emptyset \neq \{\emptyset\},\ \text{Si } A \neq B \text{ entonces } \{A\} \neq \{A, B\}$$

Por esta razón, el conjunto vacío denotado $\emptyset$ es único.

Si $x \in A$ decimos que x es elemento de A o que x pertenece a A o que A tiene como elemento a x o simplemente que A tiene a x. Si $A \subseteq B$ decimos que A esta contenido en B o que B contiene a A o que A está incluido en B, o que A es subconjunto de B.

Por lo anterior la expresión "tiene", es diferente de la expresión "contiene". Veamos algunos ejemplos:

Sea $A = \{b, \{\emptyset\}\}$ con $b \neq \emptyset$. Entonces A tiene a $\{\emptyset\}$ porque $\{\emptyset\} \in \{b, \{\emptyset\}\}$, pero A no contiene a $\{\emptyset\}$ pues $\{\emptyset\}$ no esta contenido en A ya que $\emptyset \notin A$. Por otro lado A contiene a $\emptyset$, pues $\emptyset \subseteq A$, pero A no tiene a $\emptyset$, es decir $\emptyset \notin A$. Así pues, A tiene a $\{\emptyset\}$ pero no lo contiene y A contiene a $\emptyset$ pero no lo tiene.

Hemos usado la notación:

$$\{x \mid x \text{ tiene tal propiedad}\}$$

para referirnos a la colección de todos los objetos x tales que cumplen esa propiedad. Si un conjunto está descrito de esta manera diremos que está descrito por comprehensión. Por ejemplo, dados los conjuntos A y B, podemos construir los nuevos conjuntos:

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$ llamado unión de A y B.

$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$ llamado intersección de A y B.

Un conjunto de conjuntos es un conjunto cuyos elementos son todos conjuntos. Es común llamar "familia de conjuntos" a un conjunto de conjuntos.

En general dado un conjunto de conjuntos C, podemos construir los nuevos conjuntos:

$\bigcup C = \{x \mid \text{hay un } A \in C \text{ tal que } x \in A\}$ llamado unión de C (Axioma de Unión).

Si $C \neq \emptyset$, $\bigcap C = \{x \mid \text{para todo } A \in C, x \in A\}$ llamado intesección de C (posteriormente probaremos que podemos construir este conjunto usando los axiomas) debe ser claro con estos conceptos y esta notación, que:

$$A \cup B = \bigcup\{A, B\} \text{ y } A \cap B = \bigcap\{A, B\}.$$

Otra manera de denotar conjuntos es con un conjunto I de índices o indicadores, por ejemplo

$$C = \{A_i \mid i \in I\}$$

denota al conjunto de los objetos A_i donde i es el índice, elemento del conjunto I, que indica a qué objeto A_i se hace referencia. Si $C = \{A_i \mid i \in I\}$ donde cada A_i es un conjunto, entonces $\bigcup C$ se puede denotar también como:

$$\bigcup C = \bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \text{hay } i \in I \text{ tal que } x \in A_i\}$$

Análogamente, si $I \neq \emptyset$:

$$\bigcap C = \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \text{para todo } i \in I, x \in A_i\}.$$

Una manera muy importante y útil de construir conjuntos es la siguiente: dado un conjunto A y una propiedad P, expresada en forma precisa con el lenguaje, construimos el conjunto:

$$\{ x \in A \mid x \text{ cumple } P\}.$$

(Axioma de Separación o de Comprehensión).

Aquí es necesario hacer una observación muy importante, debe ser clara la diferencia entre este proceso constructivo que llamamos Axioma de Separación, y el concepto ingenuo de conjunto como colección determinada por una propiedad; pues aquí está ya dado un objeto A que es un conjunto y consideramos la colección de elementos de A, determinados por la propiedad dada P.

Simplemente estamos separando de A, a los elementos suyos que cumplen la propiedad P. Al aplicar lo anterior, A puede ser un conjunto suficientemente grande para que se considere como universo local o universo del discurso, pero A debe ser un conjunto ya sea por suposición o porque se haya probado antes.

En todos los ejemplos descritos por comprehensión debe haber un conjunto previo del cual se hace la separación de los elementos suyos que cumplen la propiedad que describe al conjunto. Este es el modo más común de describir conjuntos en matemáticas; sólo debe quedar claro que la colección de la cual se separa el conjunto, sea un conjunto (posiblemente muy grande como para considerarlo nuestro conjunto universo), para tener la seguridad de que la colección separada sea un conjunto por el axioma de separación.

Otro conjunto que podemos construir, dado un conjunto A, es el conjunto

$$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$$

llamado potencia de A o partes de A. (Axioma del Conjunto Potencia). Nótese que los elementos de este conjunto $P(A)$ son únicamente conjuntos ya que son los subconjuntos de A. Nótese también que el símbolo $\subseteq$ no es un símbolo original del lenguaje, sino que se definió como un símbolo de relación binaria tal que:

$$x \subseteq y \Leftrightarrow \forall z(z \in x \Rightarrow z \in y)$$

EJEMPLOS

$$P(\emptyset) = \{\emptyset\},\ P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ P(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

Como para todo conjunto A se cumple que $\emptyset \subseteq A$ y que $A \subseteq A$ entonces $\emptyset \in P(A)$ y $A \in P(A)$.

Si A y B son conjuntos podemos construir el conjunto "diferencia de A menos B" denotado con $A - B$:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Nótese que $(A - B) \subseteq A$, es decir, $(A - B) \in P(A)$. Nótese también que $A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}$ queda construido a partir del axioma de separación, al separarlo de A con la propiedad $x \notin B$.

0.3 El conjunto universo local

Cuando se usa la teoría de conjuntos, se tiene como referencia, explícita ó implícitamente, un universo del discurso; es decir, un marco de referencia dentro del cual se trabaja. Este universo del discurso de los conjuntos es lo que se conoce como conjunto universal o universo local y debe ser un conjunto. Este concepto es relativo al área de interés en que se trabaja; por ejemplo en el análisis real, este universo es el conjunto:

$$\mathbb{R} \cup P(\mathbb{R}) \cup P(\mathbb{R} \cup P(\mathbb{R})) \cup P(P(\mathbb{R})) \cup ... \cup \mathbb{R}^2 \cup P(\mathbb{R}^2) \cup P(P(\mathbb{R}^2)) \cup ... \cup \mathbb{R}^n \cup P(\mathbb{R}^n) \cup P(P(\mathbb{R}^n)) \cup ...$$

Ahora podemos definir la operación "complemento relativo", relativa al universo del discurso. Si X es el universo local o conjunto universal y A es un conjunto de ese universo, es decir $A \in X$ definimos el complemento relativo $X - A$ de A respecto al universo X como A^c :

$$A^c = X - A = \{z \in X \mid z \notin A\}$$

Aquí, si suponemos que $A \notin A$, tenemos que $A \in X - A = A^c$.

Obsérvese que $X - A \subseteq X$. Si X es nuestro universo local, debemos suponer que $A \subseteq X$, pues todos los elementos de A deben ser de nuestro universo, si no, no estarían en nuestro discurso.

Algunas veces, X está implícito o sobreentendido; en este caso se escribe $A^c = \{z \mid z \notin A\}$ pero debe entenderse que cada z tal que $z \in A^c$ está en X, es decir, que A^c está incluido en el conjunto universal X.

EJERCICIO I

a) $A \cup (\bigcap B) = \bigcap\{(A \cup C) \mid C \in B\}$ suponiendo $B \neq \emptyset$.

b) $A \cap (\bigcup B) = \bigcup\{(A \cap C) \mid C \in B\}$.

c) Si $b \in A$ entonces $b \subseteq \bigcup A$ y $\bigcap A \subseteq b$.

d) Si $A \subseteq B$ entonces $\bigcup A \subseteq \bigcup B$ e $\bigcap B \subseteq \bigcap A$.

e) $\bigcup P(A) = A$ y $A \subseteq P(\bigcup A)$.

Obsérvese que $P(\bigcup A) \nsubseteq A$ pues si $A = \{\ \{a, b\}, \{c, d\}\ \}$ y $a \neq b,\ a \neq c,$.
$b \neq d, b \neq c$ entonces $\{b, c\} \in P(\bigcup A)$ pero $\{b, c\} \notin A$.

f) $A \subseteq B$ si y sólo si $P(A) \subseteq P(B)$.

g) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.

h) $X - \bigcup A = \bigcap\{X - C \mid C \in A\}$. X es el conjunto universo local.

i) $X - \bigcap A = \bigcup\{X - C \mid C \in A\}$.

j) $A \subseteq B^c$ si y sólo si $A \cap B = \emptyset$.

k) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C \cap B^c)$.

l) $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$.

m) Si $a \in B$ entonces $P(a) \in P(P(\bigcup B))$.

Sugerencia: Usar (c) y (f).

n) $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$.

o) $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$.

Obsérvese que $P(A \cup B) \nsubseteq P(A) \cup P(B)$.
Sean $A = \{a, b\}$ $B = \{b, c\}$ $(a \neq b, b \neq c, a \neq c)$ entonces se tiene

$\{a,c\} \in P(A \cup B)$, pero $\{a,c\} \notin P(A)$ y $\{a,c\} \notin P(B)$

p) $X - (X - A) = A$.

q) $X - \emptyset = X$ y $X - X = \emptyset$.

r) $A \cup (X - A) = X$ y $A \cap (X - A) = \emptyset$.

s) $A \subseteq B$ si y sólo si $X - B \subseteq X - A$.

t) $\bigcup A - \bigcup B \subseteq \bigcup (A - B)$ pero $\bigcup (A - B) \nsubseteq \bigcup A - \bigcup B$.

u) $\bigcap (A \cup B) = (\bigcap A) \cap (\bigcap B)$ y $\bigcup (A \cap B) \subseteq (\bigcup A) \cap (\bigcup B)$.

v) $\bigcap \bigcup C = \bigcap \{ \bigcap D \,|D \in C \}$ y
$\bigcup \bigcap C \subseteq \bigcap \{ \bigcup D \,|D \in C \}$ $\emptyset \notin D$ y $D \neq \emptyset$.

EJERCICIO II. Probar la equivalencia de las siguientes afirmaciones acerca de un conjunto z cualquiera. Tales afirmaciones pueden ser ciertas o no, dependiendo del conjunto z; si z las cumple, decimos que z es transitivo.

a) $\forall x \forall y$(si $x \in y$ y $y \in z$ entonces $x \in z$)

b) $\forall y$ (si $y \in z$ entonces $y \subseteq z$)

c) $\bigcup z \subseteq z$

d) $z \subseteq P(z)$

e) $\bigcup P(z) \subseteq P(z)$

f) $\forall x \forall y$(si $x \in y$ y $y \subseteq z$ entonces $x \subseteq z$)

g) $z \in P(P(z))$

Algunos ejemplos de conjuntos z que cumplen lo anterior son:

I. $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$
II. $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

Algunos ejemplos de conjuntos z que no cumplen lo anterior son:

I. $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
II. $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}\}$

III. $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$.

Se deja como ejercicio al lector verificar que los ejemplos anteriores cumplen con lo que se afirma de ellos.

Consideramos de fundamental importancia que haya quedado claro que el universo local o universo del discurso es un conjunto, ya que no hay que confundirlo con la colección o clase de todos los conjuntos, pues dicha colección no es un conjunto, es una colección o clase que **no** es conjunto, a las que se llama también clases propias. Para enfatizar la importancia de este hecho, lo demostraremos en seguida.

TEOREMA 1. Para todo conjunto, hay un conjunto que no le pertenece.

Prueba: Sea A un conjunto cualquiera. Sea

$$B = \{x \mid x \in A y x \notin x\}$$

Entonces B es un conjunto por el Axioma de Separación, ya que está separado de A con la propiedad de no pertenecer a sí mismo. Obsérvese que:

$$x \in B \Leftrightarrow x \in A \text{ y } x \notin x. \ (*)$$

Entonces B $\notin$ A, pues si B $\in$A entonces se tiene que:

$$B \notin B \underset{B \in A \ (*)}{\Rightarrow} B \in B, \text{ pero además}$$
$$B \in B \Rightarrow B \notin B.$$

Como $B \in B$ o $B \notin B$, entonces tenemos que:

$$B \in B \text{ y } B \notin B \ \overset{\nabla}{\circ}$$

Por lo tanto B $\notin$ A.□

COROLARIO. Ningún conjunto puede tener como elementos suyos a todos los conjuntos. Es decir, el universo de todos los conjuntos no es

un conjunto. Es una clase que no es conjunto, o sea una clase propia.

TEOREMA 2. Para toda clase no vacía C de conjuntos,

$$\bigcap C = \{x \mid \forall y \in C\ (x \in y)\}$$

es un conjunto único.

Prueba: Como $C \neq \emptyset$, sea $w \in C$. Entonces w es un conjunto y $\bigcap C = \{x \mid \forall y \in C(x \in y)\} = \{x \in w \mid \forall y \in C(x \in y)\}$ es un conjunto por el Axioma de Separación. $\bigcap C$ es único por el Axioma de Extensionalidad.□

Obsérvese que no se pidió que la clase o colección de conjuntos C, fuera un conjunto; sino únicamente que sea no vacía. De hecho C puede ser una clase propia y sin embargo $\bigcap C$ es un conjunto, si $C \neq \emptyset$.

TEOREMA 3. No hay un conjunto x tal que $P(x) \in P(x)$.

Prueba: Supongamos lo contrario y sea x tal que $P(x) \in P(x)$ $\therefore P(x) \subseteq x$. Sea $R = \{y \in x \mid y \notin y\}$. Si x es conjunto, R lo es por el Axioma de Separación.

Obsérvese que:

$$R \subseteq x, \therefore R \in P(x) \subseteq x, \therefore R \in x.$$

Pero:

$$R \in R \Rightarrow R \notin R \text{ y además}$$

$$R \notin R \Rightarrow R \notin x \ o\ R \in R \therefore R \in R$$

Así pues $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$. $\overset{\nabla}{\circ}$ Por lo tanto no hay tal conjunto x.□

COROLARIO. No hay un conjunto al que le pertenezcan todos sus subconjuntos. Es decir, no existe un conjunto x tal que cumple $\forall y(y \subseteq x \rightarrow y \in x)$. Así pues, si una clase x cumple esto, sería una clase propia.

1 ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

1.1 PAR ORDENADO

El par ordenado de x y y denotado $< x, y >$ debe construirse de tal modo que cumpla:

$$< x, y > = < z, w > \text{ si y sólo si } x = z \text{ y } y = w$$

es decir, si $x \neq y$ entonces $< x, y > \neq < y, x >$ lo cual significa que el orden es esencial. Hay varias definiciones que cumplen lo anterior, cualquiera de ellas sirve; la usual es la siguiente, debida a $Kuratowski, 1921$:

$$< x, y > = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

Se puede verificar que si $x, y \in A, < x, y > \in P(P(A))$

En general, la n-ada ordenada se define para $n > 2$ como:

$$< x_1, ..., x_n > = << x_1, ..., x_{n-1} >, x_n >$$

y para el caso $n = 1$, se define $< x > = x$. Otras posibles definiciones del par ordenado de x, y son:

$< x, y > = \{ \{x, \emptyset\}, \{y, \{\emptyset\}\}\}$ ($Hrbacek$ & $Jech$, 1978)
$< x, y > = \{ \{ \{x\}, \emptyset \}, \{ \{y\} \}\}$ ($Wiener$ 1914)

Si se intenta generalizar la definición de $Kuratowski$ para una terna ordenada (x, y, z) como:

$$(x, y, z) = \{\{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\}$$

no se tendrá éxito, pues fracasa la idea de ordenado; por ejemplo:

$$(\emptyset, \{\emptyset\}, \emptyset) = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}.$$
$$(\emptyset, \emptyset, \{\emptyset\}) = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}.$$

por lo tanto, $(\emptyset, \{\emptyset\}, \emptyset) = (\emptyset, \emptyset, \{\emptyset\})$ pero los segundos y los terceros elementos de las ternas son diferentes: $\{\emptyset\} \neq \emptyset$ y $\emptyset \neq \{\emptyset\}$. Además, para cualquier a, $(a, a, a) = < a, a >$; un par sería igual que una terna!.

En lo que sigue, usaremos la definición de par ordenado de *Kuratowski*. Obsérvese que $< a, a >= \{\{a\}\}$.

1.2 RELACIONES

A partir de los conjuntos A y B podemos construir el conjunto $A \times B$ de todos los pares ordenados $< x, y >$ tales que $x \in A$ y $y \in B$. Se puede verificar que $A \times B \subseteq P(P(A \cup B))$.

A^n es el conjunto de todas las n-adas ordenadas de elementos de A; así,

$$A^n = (...((A \times A) \times A)... \times A) \times A \ \ (n \text{ veces } A)$$

Una relación binaria es un conjunto de pares ordenados. Si r es una relación, el dominio de r es el conjunto:

$$Dom(r) = \{x \mid \text{hay } y \text{ tal que } < x, y > \in r\}$$

y la imagen de r es el conjunto:

$$Im(r) = \{ y \mid \text{hay } x \text{ tal que } < x, y > \in r\}.$$

Obsérvese que el dominio de una relación es el conjunto formado por el primer elemento de cada par ordenado de la relación y la imagen es el conjunto formado por el segundo elemento de cada par ordenado de la relación.

El campo de r es el conjunto $Cam(r) = Dom(r) \cup Im(r)$.

Dada una relación r con $Dom(r) \subseteq A$ y $Im(r) \subseteq B$, se tiene asociada una relación inversa r^{-1} tal que resulta de invertir los pares ordenados que pertenecen a r:

$$r^{-1} = \{< b, a > \in B \times A \mid < a, b > \in r\}$$

y se tiene que $Dom(r^{-1}) = Im(r) \subseteq B$ y $Im(r^{-1}) = Dom(r) \subseteq A$.

Definición. Sean $r \subseteq A \times B, s \subseteq B \times C$ relaciones binarias entonces definimos la relación composición $s \circ r$ como $s \circ r = \{< x, z >| < x, y > \in r$ y $< y, z > \in s$ para alguna $y \in B\} \subseteq A \times B$.

Una relación de n-argumentos, n-aria o de aridad n sobre A es un subconjunto de A^n. Sea r una relación binaria o de aridad 2 sobre un conjunto A, es decir $r \subseteq A^2$. Obsérvese que:

$$r \subseteq A^2 \Leftrightarrow Cam(r) \subseteq A$$
$$A \subseteq Cam(r) \Leftrightarrow \forall x \in A\ \exists y \in A(< x, y > \in r \text{ o } < y, x > \in r)$$

Si $< z, y > \in r$, decimos que z está r-relacionado con y y también lo escribimos como $z\ r\ y$.

1.3 Órdenes parciales, totales y buenos; conjuntos bien fundados e inducción fuerte. Particiones

Con "sii" abreviamos "si y sólo si". En lo que sigue, $r \subseteq A \times A$.

Definimos:

i) $< A, r >$ es un Conjunto Parcialmente Ordenado ($COPO$) sii para todo $x \in A, < x, x > \notin r$ (r antirreflexiva en A) y para todo $x, y, z \in A$, si $< x, y > \in r$ y $< y, z > \in r$ entonces $< x, z > \in r$, (r es transitiva en A).

ii) $< A, r >$ es un Conjunto con Tricotomía ($COTRI$) sii para todo $x, y \in A$, $x = y$ o $< x, y > \in r$ o $< y, x > \in r$, y sólo una.

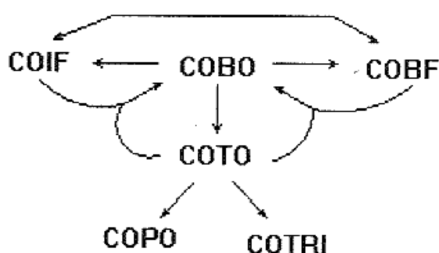
iii) $< A, r >$ es un Conjunto Totalmente (o linealmente) Ordenado ($COTO$) sii $< A, r >$ es $COPO$ y es $COTRI$.

iv) $< A, r >$ es un Conjunto Bien Ordenado ($COBO$) sii $< A, r >$ es $COPO$ y para todo $x \subseteq A$, si $x \neq \emptyset$ entonces hay $y \in x$ tal que para todo $z \in x$: $< y, z > \in r$ o $y = z$; tal y se llama el r-mínimo de x.

v) $< A, r >$ es un Conjunto Bien Fundado ($COBF$) sii para todo $x \subseteq A$, si $x \neq \emptyset$ entonces hay $y \in x$ tal que para todo $z \in x, < z, y > \notin r$; tal y se llama un r-minimal de x. Obsérvese que puede no ser único.

vi) $< A, r >$ es un Conjunto con Inducción Fuerte ($COIF$) sii para todo $x \subseteq A$, si para todo $y \in A$, el hecho de que todos los elementos de A r-relacionados con y estén en x, implica que $y \in x$ entonces $A \subseteq x$.

Las seis anteriores propiedades de conjuntos con una relación binaria quedan relacionadas entre sí en la forma que indica el siguiente diagrama donde las flechas representan implicación:



Relación entre órdenes parciales, totales y buenos
con relaciones bien fundadas e inducción fuerte.

Como ejemplo probaremos dos de las implicaciones anteriores:

$COIF \Rightarrow COBF$.

Sea $< A, r > COIF$. Sea $X \subseteq A$ y $X \neq \emptyset$.

Veamos por reducción al absurdo que X tiene un elemento r-minimal. Supongamos que X no tiene un r-minimal. Probaremos que

(*) $\forall y \in A(\forall w \in A(wry \Rightarrow w \in (A - X)) \Rightarrow y \in (A - X)\,)$:

Sea pues $y \in A$ tal que $\forall w \in A(wry \Rightarrow w \in (A - X))$. Si $y \in X$ entonces como $\forall w \in A(wry \Rightarrow w \notin X)$, tendremos que y será un

r-minimal en X, contra la suposición; de aquí que $y \notin X$, es decir, $y \in A - X$ con lo que queda probado (*).

Ahora, como $< A, r >$ $COIF$ y $(A - X) \subseteq A$, se tiene por (*) que $A = A - X$ de donde, como $X \subseteq A$, $X = \emptyset$ $\overset{\nabla}{\circ}$.

Así pues, X sí tiene un r-minimal y $< A, r >$ es un $COBF$.$\square$

$COBF \Rightarrow COIF$.

Sea $< A, r >$ $COBF$. Sea $X \subseteq A$. Queremos probar que:

$$(\forall y \in A(\forall w \in A(w\ r\ y \Rightarrow w \in X) \Rightarrow y \in X)) \Rightarrow A \subseteq X.$$

Supongamos que no se cumple $A \subseteq X$. Entonces $A - X \neq \emptyset$ y además $(A - X) \subseteq A$. Sea pues y un r-minimal en $(A - X)$; entonces $\forall w \in A(w\ r\ y \Rightarrow w \notin (A - X))$; entonces $\forall w \in A(w\ r\ y \Rightarrow w \in X)$, pero $y \notin X$, entonces tenemos que $\exists y \in A(\forall w \in A(w\ r\ y \Rightarrow w \in X) \wedge y \notin X)$ de donde se tiene por contrapositiva que $< A, r >$ es $COIF$.$\square$

Sea $r \subseteq A \times A$:

i) r es la relación diagonal o identidad sii para todo $x, y \in A$, $< x, y > \in r$ sii $x = y$.

Si Id_A denota la relación identidad en A, $Id_A = \{< x, x > \mid x \in A\}$.

ii) r es reflexiva sii para toda $x \in A, < x, x > \in r$. En este caso $A \subseteq Cam(r)$ y por lo tanto $Cam(r) = A$. Obsérvese que r es reflexiva sii $Id_A \subseteq r$.

iii) r es simétrica sii para todo $x, y \in A$, si $< x, y > \in r$ entonces $< y, x > \in r$.

Obsérvese que r es simétrica sii $r = r^{-1}$.

iv) r es transitiva sii para todo $x, y, z \in A$, si $< x, y > \in r$ y $< y, z > \in r$ entonces $< x, z > \in r$. Obsérvese que r es transitiva sii $r \circ r \subseteq r$.

v) r es antisimétrica sii para toda $x, y \in A$, si $< x, y > \in r$ y $< y, x > \in r$ entonces $x = y$.

vi) r es una relación de equivalencia sobre A sii r es reflexiva, simétrica y transitiva. En este caso $Cam(r) = A$. Si r es una relación de equivalencia sobre A, definimos para cada $x \in A$, el conjunto $[x] = \{y \mid < x, y > \in r\}$ llamado la clase de equivalencia de x módulo r. Es inmediato que $[x] = [y]$ sii $< x, y > \in r$, pues $y \in [y]$ y r es simétrica y transitiva. El conjunto cociente de A módulo la relación de equivalencia r, es

$$A/r = \{[x] \mid x \in A\}.$$

vii) r es "sin puntos aislados" sii para toda $x \in A$ hay $y \in A$ tal que $< x, y > \in r$ o $< y, x > \in r$. Es decir, para todos, o están r-relacionados con alguien o alguien con ellos.

viii) r es euclidiana sii para todo x, y, $z \in A$, si $< x, y > \in r$ y $< x, z > \in r$ entonces $< y, z > \in r$.

Una partición de A es un conjunto $\mathsf{P}, \mathsf{P} \subseteq P(A)$ que cumple:

1) Para todo $x, y \in \mathsf{P}$, si $x \neq y$ entonces $x \cap y = \emptyset$.

2) $\bigcup \mathsf{P} = A$.

3) Para todo $x \in \mathsf{P}$, $x \neq \emptyset$.

Si r es una relación de equivalencia sobre A, entonces $A/r = \{[x] \mid x \in A\}$ es una partición de A, donde $[x] = \{y \mid < x, y > \in r\}$.

Si P es una partición de A, entonces

$$r = \{< x, y > \in A \times A \mid \text{hay } a \in \mathsf{P} \text{ tal que } x, y \in a\} \subseteq A \times A$$

es una relación de equivalencia sobre A.

1.4 FUNCIONES

Una función es una relación F con la propiedad de que para todo $x \in Dom(F)$ hay una única y tal que $< x, y > \in F$. Es usual llamar a tal única y, el valor de F en x y denotarla $y = F(x)$;

$Im(F) = \{F(x) \mid x \in Dom(F)\}$, también se denota como $F[Dom(F)]$.

Decimos que F es función de A en B y lo escribimos $F : A \rightarrow B$, si $Dom(F) = A$, $Im(F) = F[A] \subseteq B$ y F es una función. Si F es una función de A en B, decimos que B es el codominio o contradominio de F. Obsérvese que $Im(F) \subseteq B$; así pues, el contradominio de una función es cualquier conjunto que contenga a la imagen.

F es uno a uno o inyectiva sii para cada $y \in Im(F)$ hay una única x tal que $< x, y > \in F$ (es decir $F(x) = y$).

Es decir, si $x, z \in Dom(F)$ y $x \neq z$ entonces $F(x) \neq F(z)$; o bien, si $x, z \in Dom(F)$ y $F(x) = F(z)$ entonces $x = z$.

F es sobre B o suprayectiva sii $Im(F) = B$. Claramente toda función F es sobre $Im(F)$.

$F : A \rightarrow B$ es biyección sii F es uno a uno y es sobre B.

Si $F : A \rightarrow B$ es una función inyectiva, la relación inversa de F denotada F^{-1} es una función cuyo dominio es $Dom(F^{-1}) = Im(F)$ y cuya imagen es $Im(F^{-1}) = Dom(F)$, es decir:

$$F^{-1} : Im(F) \rightarrow Dom(F).$$

Además, F^{-1} es función inyectiva. Si F no es inyectiva, entonces la relación inversa de F es una relación que no es función.

Si $F : A \rightarrow B$ y $G : D \rightarrow C$, tales que $Im(F) \subseteq Dom(G)$, entonces podemos definir la composición de las funciones F y G, que es una función de A en C denotada $G \circ F : A \rightarrow C$ y tal que para toda $x \in A$: $G \circ F(x) = G(F(x))$. Es decir,

$$G \circ F = \{< x, y > \in Dom(F) \times Im(G) \mid < F(x), y > \in G\}$$

Es fácil verificar que, si F y G son inyectivas, entonces $(G \circ F)$ es inyectiva, y también que si F y G son suprayectivas, entonces $(G \circ F)$ es suprayectiva. Por lo tanto, si F y G son biyectivas, $(G \circ F)$ es biyectiva. Es fácil ver que la composición es asociativa sobre las funciones, pero no es conmutativa.

Una operación n-aria o de n argumentos en A es una función de A^n en A.

Si A es un conjunto de funciones, entonces $\bigcup A$ es una función sii $\forall\ F, G \in A;\ \forall\ x \in (Dom(F) \cap Dom(G)),\ F(x) = G(x)$. Esto último significa que las funciones de A son compatibles dos a dos.

Es inmediato que $Dom(\bigcup A) = \bigcup_{F\in A} Dom(F)$ y que $Im(\bigcup A) = \bigcup_{F\in A} Im(F)$ en el caso de que $\bigcup A$ sea función. Un caso particular es el siguiente: si A es un conjunto de funciones y $< A, \subsetneq >$ es $COTO$, entonces $\bigcup A$ es una función.

EJERCICIO III

1) Pruebe que con las definiciones dadas de producto cartesiano y de par ordenado:
   a) $< x, y > = < z, w >$ sii $x = z$ y $y = w$.
   b) $< x, y > = < y, x >$ sii $x = y$.
   c) $A \times B = \bigcup\{A \times \{b\} \mid b \in B\}$.
   d) $A \times \bigcup B = \bigcup\{A \times c \mid c \in B\}$.
   e) Pruebe que :
      $[(W - A) \times Y] \cup [W \times (Y - B)] = W \times Y - A \times B$.
   f) Sean $A \neq \emptyset$ y $C \neq \emptyset$ entonces: $A \subseteq B$ y $C \subseteq D$ sii $A \times C \subseteq B \times D$.
2) Verifique que si $x, y \in A$ entonces $< x, y > \in P(P(A))$.
3) Verifique que $A \times B \subseteq P(P(A \cup B))$.
4) Pruebe que toda relación de equivalencia sobre un conjunto A determina una partición de A, e inversamente. De hecho, dé usted una biyección entre el conjunto de todas las relaciones de equivalencia sobre A y el conjunto de todas las particiones de A.
5) Toda relación r sobre A cumple lo siguiente:
   a) r es relación de equivalencia sii r es simétrica, transitiva y sin puntos aislados.
   b) r es simétrica y antisimétrica sii r está incluida en la relación diagonal o identidad.

c) r es relación de equivalencia sii r^{-1} es relación de equivalencia.
d) $\forall x \in Dom(r) < x, x > \in r^{-1} \circ r$ y $\forall y \in Im(r)$ $< y, y > \in r \circ r^{-1}$.
e) r es relación de equivalencia sii r es reflexiva y euclidiana.

6) Sea r una relación binaria sobre A, pruebe que:
   a) r reflexiva, antisimétrica y transitiva (r orden reflexivo) $\Rightarrow$ $r - \{< a, a > \mid a \in A\}$ es antirreflexiva y transitiva (orden estricto).
   b) r es antirreflexiva y transitiva (r orden estricto) $\Rightarrow$ $r \cup \{< a, a > \mid a \in A\}$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva (orden reflexivo).

7) Pruebe las relaciones de implicación entre órdenes parciales, totales y buenos con relaciones bien fundadas e inducción fuerte, dadas en el diagrama correspondiente y que no fueron probadas.

8) Sean $F : A \rightarrow B$ y $G : B \rightarrow C$:
   a) Si $G \circ F : A \rightarrow C$ es biyectiva entonces F es inyectiva y G es suprayectiva.
   b) Dar un ejemplo en el cual $G \circ F : A \rightarrow C$ sea biyectiva pero F sea no suprayectiva y G sea no inyectiva.
   c) Dar un ejemplo en el cual F sea inyectiva y G sea suprayectiva, pero $G \circ F$ sea no inyectiva y no suprayectiva.

9) Si $< A, r >$ es $COBO$, $B \subseteq A$ y $r' = r \cap B \times B$, entonces $< B, r' >$ es $COBO$.

2 Los números naturales,

inducción y recursión

2.1 Los números naturales

Idea intuitiva: que cada natural sea el conjunto de los naturales anteriores a él y en ese caso el orden sea la pertenencia.

$0 = \emptyset$
$1 = \{0\} = \{\emptyset\}$
$2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
...
$n = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$
$n + 1 = \{0, 1, 2, ..., n\}$
...

Observaciones. De los ejemplos anteriores, basados en la idea intuitiva, las siguientes propiedades deben de cumplirse si n, m son números naturales:

i) $< n, \in >$ es un orden total ($COTO$). ($\in$ es una relación antirreflexiva, transitiva y total dentro de n).

ii) $n \in m \Rightarrow n \subseteq m$ (m transitivo).

iii) $n < m \Rightarrow n \in m$ y $n \underset{\neq}{\subseteq} m$.

iv) $n + 1 = n \cup \{n\}$.

v) n tiene "n" elementos.

Las siguientes definiciones son para cualquier conjunto de conjuntos x:

DEFINICIÓN. El sucesor de x es $x \cup \{x\}$.

DEFINICIÓN. x es transitivo si y sólo si $\forall y(y \in x \Rightarrow y \subseteq x)$.

EJERCICIO. Probar las siguientes equivalencias de la definición de conjunto transitivo para un conjunto z:

a) $\forall x \forall y$(si $x \in y$ y $y \in z$ entonces $x \in z$).
b) $\forall y$ (si $y \in z$ entonces $y \subseteq z$).
c) $\bigcup z \subseteq z$.
d) $z \subseteq P(z)$.
e) $\bigcup P(z) \subseteq P(z)$.
f) $\forall x \forall y$(si $x \in y$ y $y \subseteq z$ entonces $x \subseteq z$).

PROPIEDADES DE LOS CONJUNTOS TRANSITIVOS

PROPOSICIÓN 1. A es transitivo si y sólo si $P(A)$ es transitivo
Prueba:
$\Rightarrow$) Sea A transitivo. Sea x $\in P$(A), entonces x $\subseteq$ A.
Sea y $\in$ x $\Rightarrow$ y $\in$A $\Rightarrow$ y $\subseteq$ A $\therefore$ y $\in P$(A). Así, x $\subseteq P$(A).
$\Leftarrow$) Sea P(A) transitivo. Sea y $\in$A, entonces $\{y\} \subseteq$ A de donde $\{y\} \in P$(A) $\Rightarrow \{y\} \subseteq$ P(A) $\therefore$ $y \in P$(A), así que $y \subseteq$ A.□

PROPOSICIÓN 2. Si A es transitivo entonces $\bigcup A$ es transitivo.
Prueba: Supongamos que A es transitivo. Sea $x \in \bigcup A$ $\therefore$ $\exists y \in A$ tal que $x \in y$. Por hipótesis $y \subseteq A$ de donde $x \in A$. De aquí es inmediato que $x \subseteq \bigcup A$. Así pues $\bigcup A$ es transitivo.

Se observa que el inverso no es cierto, como contraejemplo se tiene el siguiente:

Sea A $= \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Entonces $\bigcup$A $= \{\{\emptyset\}, \emptyset\}$ es transitivo pero A no.

PROPOSICIÓN 3. x es transitivo si y sólo si $\bigcup(x \cup \{x\}) = x$.
Prueba:
$\Rightarrow$) Supongamos que x es transitivo.
$\subseteq$) Sea $z \in \bigcup(x \cup \{x\}) \Rightarrow \exists\, y \in x \cup \{x\}$ tal que $z \in y$
i) $y \in x \Rightarrow z \in x$ (Transitividad de x)
ii) $y = x \Rightarrow z \in x$ (Pues $z \in y$)
Así pues, $z \in x$.
$\supseteq$) Sea $z \in x$. Como $x \in x \cup \{x\}$ entonces $z \in \bigcup(x \cup \{x\})$.

$\Leftarrow$) Sea $y \in x$. Entonces $y \in x \cup \{x\}$.
Sea $z \in y \Rightarrow z \in \bigcup(x \cup \{x\})$ y por hipótesis $z \in x$. Así $y \subseteq x$ y x es transitivo.□

Ejemplos de conjuntos transitivos

(T1) $\{ \emptyset , \{\emptyset\} , \{\{\emptyset\}\} \}$ Donde $\in$ no es total ni transitiva.
(T2) $\{ \emptyset , \{\emptyset\} , \{ \emptyset , \{\emptyset\} \} \}$ Donde $\in$ es total y transitiva.
(T3) $\{ \emptyset , \{\emptyset\} , \{ \emptyset , \{\emptyset\} \} , \Omega \}$ Donde $\Omega = \{\Omega\}$, $\in$ es no total transitiva.
(T4) $\{a, b, c, b', \emptyset\}$ donde $a = \{\emptyset, b, b'\}$, $b = \{\emptyset, c, b'\}$, $b' = \{\emptyset, c\}$, $c = \{\emptyset, a\}$, con $c \neq b$, $c \neq b'$, $\in$ es total y no transitiva.

Ejemplos de conjuntos no transitivos

(NT1) $\{ \emptyset , \{\{\emptyset\}\} , \{\emptyset , \{\emptyset\}\} \}$ Donde $\in$ es no total transitiva.
(NT2) $\{ \emptyset , \{\emptyset\} , \{ \emptyset , \{\emptyset\} , \{\{\emptyset\}\} \} \}$ Donde $\in$ es total y transitiva.
(NT3) $\{ \emptyset , \{ \emptyset , \{\emptyset\} \} , \{ \{ \emptyset , \{\emptyset\} \} \} \}$ Donde $\in$ no es total ni transitiva.
(NT4) $\{d , \{\{d, \emptyset\}\}, \{d, \emptyset\}\}$ Donde $d = \{\{\{d, \emptyset\}\}\}$ y $\in$ es total no transitiva. Aquí d es un conjunto raro, pues pertenece a un elemento de un elemento suyo, es decir $d \in \bigcup\bigcup d$.

Los ejemplos anteriores muestran que:

i) A transitivo no implica que $\in$ sea transitiva en A (T1). Y $\in$ transitiva en A no implica que A es transitivo (NT1), (NT2).

ii) A transitivo no implica que $\in$ sea total en A (T1). Y $\in$ total en A no implica que A sea transitivo (NT2)

iii) $\in$ transitiva en A no implica que $\in$ sea total en A (NT1). Y $\in$ total en A no implica que $\in$ sea transitiva en A (NT4).

PROPOSICIÓN 4. Si A es transitivo y $\in$ es transitiva en A entonces para cualquier $x \in A$, x es transitivo.
Prueba: Sea A transitivo tal que $\in$ es transitiva en A. Sea $x \in A$. Sean $z \in y$ y $y \in x$.

$$z \in y \in x \Rightarrow y \in A, z \in A$$

$\therefore$ $z \in x$ pues $\in$ es transitiva en A $\therefore$ x es transitivo.□

¿Cómo caracterizar a los números naturales? Los números naturales deben ser conjuntos transitivos y bien ordenados por $\in$. Si pedimos sólo que sean transitivos no basta (T1). Si pedimos sólo que $\in$ sea transitiva o total no basta por (NT2).

Para que un conjunto sea un natural pediremos entonces que sea transitivo y que la relación $\in$ sea un $COBO$.

Pero aún con esto no basta pues

$$\{1, 2, ..., n, n \cup \{n\}, ...\}$$

de ser un conjunto, sería transitivo y $\in$ sería un buen orden en él, pero es infinito y los naturales no lo son. ▽○

Pediremos entonces que todo subconjunto no vacío tenga máximo respecto a la relación $\in$, es decir:

$$\forall w[w \subseteq x \wedge w \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in w \forall z \in w(z \in y \vee z = y)]$$

con lo que se tendrá la finitud.

DEFINICIÓN. x es un número natural si y sólo si:

i) x es conjunto transitivo $(\forall y \in x(y \subseteq x))$
ii) $< x, \in >$ es un Conjunto Bien Ordenado ($COBO$).
iii) Todo subconjunto no vacío de x tiene un $\in$ máximo, es decir:

$$\forall w[w \subseteq x \wedge w \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in w \, \forall z \in w(z \in y \vee z = y)]$$

TEOREMA 4
a) Los números naturales no se pertenecen a sí mismos, es decir:

Si x es un número natural entonces $x \notin x$.

b) Los números naturales son conjuntos de números naturales; es decir:

Si x es un número natural,
entonces para cualquier $y \in x$, y es un número natural.

Prueba:
a) Sea x un natural. Si $x \in x \Rightarrow \exists y \in x$ tal que $y \in y$ pero esto contradice el hecho de que $< x , \in >$ $COPO$. Así pues $x \notin x$.
b) Sea x un natural. Sea $y \in x$.
  i) y es transitivo: Sea $u \in v \in y$. Como x es transitivo se tiene $v \in x$, y $u \in x$, por ser $\in$ transitiva en x se tiene $u \in y$.
  ii) $< y , \in >$ es $COBO$, pues $y \in x \Rightarrow y \subseteq x$ (por ser x transitivo) y como $< x, \in >$ es $COBO$ y ser $COBO$ se hereda para subconjuntos entonces $< y, \in >$ es $COBO$.
  Ver ejercicio III, 9).
  iii) Dado un subconjunto no vacío de y, es un subconjunto no vacío de x por lo que ahí tiene un $\in$-máximo (es decir, que todo subconjunto tenga un máximo, se hereda).
Así pues y es un número natural.$\square$

Consideremos la propiedad "ser número natural" y consideremos la clase:

$$\mathbb{N} = \{x \mid x \text{ es un número natural}\}$$

¿$\mathbb{N}$ es un conjunto? No lo sabemos, lo veremos más adelante. Obsérvese que si $\mathbb{N}$ fuera conjunto, sería transitivo pues: $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \subseteq \mathbb{N}$ (Teorema 4.b).

Recordemos los Axiomas de Peano, para caracterizar a los números naturales:

1) 0 es número natural.

2) Si n es número natural, el sucesor de n es número natural.

3) 0 no es sucesor de ningún número natural.

4) Si el sucesor de n es igual al sucesor de m entonces $n = m$.

5) Si A es un conjunto de naturales tal que $0 \in A$ y para todo número natural n, si $n \in A$ entonces (sucesor de n) $\in A$, entonces todos los naturales estan en A, es decir, $\mathbb{N} = A$.

Este último axioma se puede ver también como:

5') Si P es una propiedad acerca de números naturales tal que 0 cumple P y para todo número natural n, si n cumple P entonces (sucesor de n) cumple P, entonces todos los naturales cumplen P.

Observación. La equivalencia de las dos versiones se tiene así:

5') $\Rightarrow$ 5) Dado A, P es "$x \in A$".

5) $\Rightarrow$ 5') Dada P, A es $\{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ y } x \text{ cumple } P\}$, y A es conjunto, si $\mathbb{N}$ lo es.

TEOREMA 5

a) 0 es número natural.

b) Si x es número natural entonces $S(x) = x \cup \{x\}$ es número natural.

Prueba:

a) Es trivial pues $0 = \emptyset$ cumple la propiedad ser número natural, por vacuidad.

b) Sea x un número natural. Veamos que $x \cup \{x\}$ es número natural.

i) $x \cup \{x\}$ es transitivo. Sea $y \in x \cup \{x\}$, hay dos casos:

$y \in x$; por ser x transitivo se tiene $y \subseteq x \subseteq x \cup \{x\}$

$y = x$; con lo que $y = x \subseteq x \cup \{x\}$

ii) $\in$ es antirreflexiva en $x \cup \{x\}$. Si $y \in x \cup \{x\}$, se tienen los casos:

$y \in x$; con lo que $y \notin y$ por ser $\in$ antirreflexiva en x.
$y = x$; por el Teorema 4 $x \notin x$, es decir $y \notin y$.

iii) $\in$ es transitiva en $x \cup \{x\}$. Si $u, v, w \in x \cup \{x\}$ y suponemos que $u \in v \in w$, entonces hay cuatro casos:

$u, v, w \in x \Rightarrow u \in w$ por ser $\in$ transitiva en x.
$u, v \in x$ y $w = x \Rightarrow u \in x$ por ser x transitivo con lo que $u \in w$.

Los otros dos casos no son posibles:

$v = x \Rightarrow x \in w$, x transitivo y $w \in x \Rightarrow x \in x$.
$u = x \Rightarrow x \in v$, x transitivo y $v \in x \Rightarrow x \in x$.

Pero $x \in x$ es una contradicción por ser $\in$ antirreflexiva en $x \cup \{x\}$ por ii).

iv) Todo subconjunto no vacío de $x \cup \{x\}$ tiene máximo y mínimo.

Sea $y \subseteq x \cup \{x\}, y \neq \emptyset$, entonces:

$y \cap x = \emptyset \Rightarrow y = \{x\}$ donde x es máximo y mínimo de $\{x\}$.
$y \cap x \neq \emptyset$, se tiene $y \cap x \subseteq x \Rightarrow y \cap x$ tiene máximo y mínimo y $y \cap x = y - \{x\}$ de donde el mínimo de $y \cap x$ es el $\in$-mínimo de y, aún si $x \in y$. Ahora bien, si $x \in y$, entonces el $\in$-máximo de y es x y si $x \notin y$, entonces el $\in$-máximo de $y \cap x$ es el $\in$-máximo de y, ya que en este caso $y \subseteq x$ y $y \cap x = y$.□

Ya sabemos que $0 \in \mathbb{N}$ y que: $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \cup \{x\} \in \mathbb{N}$, pero

$$\mathbb{N} = \{x \mid x \text{ es número natural }\}$$

es una clase que no sabemos si es un conjunto. Esto motiva la siguiente

DEFINICIÓN. Un conjunto A se llama inductivo si y sólo si:

$$\text{i) } \emptyset \in A.$$
$$\text{ii) } \forall y\,(y \in A \Rightarrow y \cup \{y\} \in A).$$

¿Hay conjuntos inductivos? Obsérvese que si $\mathbb{N}$ fuera un conjunto, sería conjunto inductivo por el Teorema 5.

Observación. No se puede probar, con los axiomas que tenemos, que haya conjuntos inductivos. Obsérvese que intuitivamente un conjunto inductivo es infinito, pues debe tener los siguientes elementos:

$$\emptyset \,;\, \{\emptyset\} \,;\, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \,;\, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \,; \ldots$$

AXIOMA DE INFINITO. "Hay un conjunto inductivo." Es decir:

$$\exists x \, [\emptyset \in x \;\wedge\; \forall y \, (y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x)] \qquad \text{o bien:}$$
$$\exists x \forall z \, [z = \emptyset \vee \exists w \, (w \in x \wedge z = w \cup \{w\}) \Rightarrow z \in x]$$

Obsérvese que por el Teorema 2, la intersección de todos los conjuntos inductivos, es un conjunto, es decir:

$$\bigcap \{ \, x \mid \; x \text{ es inductivo } \}$$

es un conjunto, suponiendo que hay un conjunto inductivo. Por el Teorema 2, únicamente requerimos que haya conjuntos inductivos, no que la colección de los conjuntos inductivos fuera un conjunto, pues no lo es realmente.

DEFINICIÓN. Sea $\omega = \bigcap\{ \, x \mid x \text{ es conjunto inductivo}\}$.
ω es un conjunto por dos razones: el Axioma de Infinito y el Teorema 2; es inmediato que es un conjunto inductivo, es el menor conjunto inductivo (con el orden de $\subseteq$) y está contenido en todo conjunto inductivo.

TEOREMA 6. Todo número natural pertenece a ω. O bien: Todo número natural pertenece a todo conjunto inductivo. O bien:

$$\forall x [x \text{ número natural} \Rightarrow \forall A (A \text{ inductivo} \Rightarrow x \in A)].$$

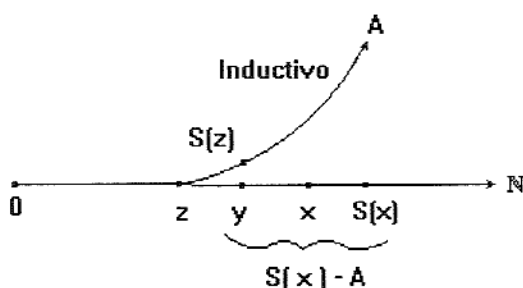
O abreviado:

$$\forall x \in \mathbb{N} \; \forall \, A \text{ inductivo } (x \in A).$$

O más breve:

$$\mathbb{N} \subseteq \omega = \bigcap \{x \mid x \text{ es inductivo}\}.$$

Prueba: Por reducción al absurdo. Supongamos que existe x número natural y existe A conjunto inductivo, tales que $x \notin A$. Entonces $S(x) = x \cup \{x\} \in \mathbb{N}, x \in (S(x) - A) \neq \emptyset$ y $S(x) - A \subseteq S(x)$.



Sea pues y el $\in$-mínimo de $S(x) - A$; se tiene $y \subseteq S(x)$ pues $y \in S(x)$ y $S(x)$ es transitivo, además $y \subseteq A$ (pues $\forall w \in y(w \in A)$, pues $w \notin S(X) - A$ ya que y es el $\in$-mínimo de $S(x) - A$).

Como $y \in S(x)$, por el Teorema 4 b) tenemos que $y \in \mathbb{N}$. Si $y = \emptyset$ entonces, por ser A inductivo, $y \in A$ $\overset{\nabla}{\circ}$. $\therefore$ $y \neq \emptyset$. Sea z el $\in$-máximo de y; como $y \subseteq A, z \in A \Rightarrow S(z) \in A$ por ser A inductivo.

Veamos que $y = S(z)$, con lo que tendríamos $y = S(z) \in A$ $\overset{\nabla}{\circ}$.

$\subseteq$) Sea $u \in y$. $u \notin S(z) \Rightarrow u \notin z$ y $u \neq z$.
Como $u, z \in y$ y $\in$ es orden total en y, por tricotomía se tiene $z \in u$, lo cual contradice el hecho de que z es $\in$-máximo de y.
Así pues: $u \in y \Rightarrow u \in S(z)$.

$\supseteq$) $z \in y$ y y transitivo $\Rightarrow z \subseteq y$, $\therefore$ $S(z) = z \cup \{z\} \subseteq y$.□

COROLARIO. $\mathbb{N}$ es un conjunto, $\mathbb{N} = \omega$, $\mathbb{N}$ es transitivo e inductivo.

Prueba: Debe ser claro que $\mathbb{N} = \{x \in \omega \mid x \text{ es número natural } \}$ es un conjunto por el axioma de separación, ya que ω es conjunto. $\mathbb{N}$ es transitivo por el Teorema 4 (b).

La otra contención, $\omega \subseteq \mathbb{N}$, se da automáticamente pues $\mathbb{N}$ es inductivo por el Teorema 5, y ω está contenido en todos los conjuntos inductivos (ya que ω es la intersección de todos los conjuntos inductivos). Así pues $\mathbb{N} \subseteq \omega$ por el teorema 6 y $\omega \subseteq \mathbb{N}$, por lo ya dicho, por lo tanto $\mathbb{N} = \omega$.

COROLARIO (Principio de Inducción Matemática)

Si $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que $0 \in A$ y $\forall n \in \mathbb{N}(n \in A \Rightarrow S(n) \in A)$ entonces $A = \mathbb{N}$.

Debe ser claro que las hipótesis significan que A es un conjunto inductivo por lo que $\omega = \mathbb{N} \subseteq A$ y entonces $A = \mathbb{N}$.

TEOREMA 7 (Axiomas de Peano)

1) $0 \in \mathbb{N}$.

2) Si $x \in \mathbb{N}$ entonces $S(x) = x \cup \{x\} \in \mathbb{N}$.

3) $\forall x \in \mathbb{N}\ (0 \neq S(x))$.

4) $\forall x, y \in \mathbb{N}\ (S(x) = S(y) \Rightarrow x = y)$. Es decir, S es inyectiva.

5) Si $A \subseteq \mathbb{N}$, $0 \in A$ y $\forall n(n \in A \Rightarrow S(n) \in A)$ entonces $\mathbb{N} \subseteq A$ y por lo tanto $A = \mathbb{N}$.

Prueba:

1) y 2) son una reformulación del Teorema 5.

3) Sea $x \in \mathbb{N}$. $S(x) = x \cup \{x\} \neq \emptyset$, pues $x \in S(x)$ y $x \notin \emptyset$.

4) Supongamos $S(x) = x \cup \{x\} = y \cup \{y\} = S(y)$. Si $x \neq y$ entonces $x \in y$ y $y \in x \Rightarrow x \in x$ $\overset{\nabla}{\circ}$ Por ser x transitivo.

De otro modo, si suponemos $S(x) = x \cup \{x\} = y \cup \{y\} = S(y)$. Como sabemos que si x es transitivo, $x = \bigcup(x \cup \{x\})$ y como x, y transitivos tenemos:

$$x = \bigcup(x \cup \{x\}) = \bigcup(y \cup \{y\}) = y$$

de donde $x = y$.

5) Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que $0 \in A$ y $\forall n \in A(S(n) \in A)$. Entonces A es un conjunto inductivo, de donde $\mathbb{N} \subseteq A$ y por tanto $\mathbb{N} = A$.

LEMA. Sean m, n elementos de $\mathbb{N}$. Entonces $m \in n$ si y sólo si $S(m) \in S(n)$. Es decir, la operación sucesor es compatible con $\in$ en $\mathbb{N}$.

Prueba: La prueba es por inducción (inciso 5 del teorema 7):

$\Rightarrow$) Sea $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N}(m \in n \Rightarrow S(m) \in S(n))\}$.

$0 \in A$, por vacuidad $\forall m \in \mathbb{N}\ (m \notin 0)$. Sea $n \in A$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \in S(n) = n \cup \{n\}$

$$m \in n \underset{n \in A}{\Rightarrow} S(m) \in S(n) \subseteq S(S(n)) \therefore S(m) \in S(S(n)).$$
$$m = n \Rightarrow S(m) = S(n) \in S(S(n)) \therefore S(m) \in S(S(n)).$$

$\therefore S(n) \in A$.

$\Leftarrow$) Sea $B = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N}\ (S(m) \in S(n) \Rightarrow m \in n)\}$.

$0 \in B$, pues $\forall m \in \mathbb{N}(S(m) \notin S(0))$ ya que $S(m) \in 0 \cup \{0\} \Rightarrow S(m) = 0\ \overset{\nabla}{\circ}$.

Sea $n \in B$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $S(m) \in S(S(n)) = S(n) \cup \{S(n)\}$.

$$S(m) \in S(n) \underset{n \in B}{\Rightarrow} m \in n \subseteq S(n).$$
$$S(m) = S(n) \Rightarrow m = n \in S(n) \text{ (inciso 4 del teorema 7).}$$

$\therefore S(n) \in B$.□

LEMA. Para todo n elemento de $\mathbb{N}$, $n = 0$ o existe un elemento p de $\mathbb{N}$ tal que $n = S(p)$.

Prueba: Sea $T = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 0 \vee \exists p \in \mathbb{N}\,(n = S(p))\}$. Es claro que $0 \in T$.

Supongamos $k \in T$.

Entonces $k \in \mathbb{N}$ y obviamente $S(k) \in T$. Por inducción se llega a que $T = \mathbb{N}$.

TEOREMA 8. $\mathbb{N}$ con la relación $\in$ es un Conjunto Bien Ordenado ($COBO$).

Prueba:

i) $\forall n \in \mathbb{N}\ (n \notin n)$. Es el teorema 4.

ii) $\forall n, m, p \in \mathbb{N}(n \in m \wedge m \in p \Rightarrow n \in p)$. Si $n \in m$ y $m \in p$ como p es transitivo porque $p \in N$, entonces $n \in p$.

iii) $m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow m \in n \ \vee \ n \in m \ \vee \ m = n$; y sólo uno de los tres.

Aunque ser relación total o sea $< \mathbb{N}, \in >$ $COTRI$, se sigue de que todo subconjunto no vacío tenga primer elemento, es necesario probarlo; lo probaremos usando inducción:

- Sólo uno de los tres:

$$m \in n \text{ y } n \in m \Rightarrow m \in m \text{ (por ser } m \text{ transitivo) } \overset{\nabla}{\circ}.$$
$$m \in n \text{ y } m = n \Rightarrow m \in m \overset{\nabla}{\circ}.$$

- Al menos uno: Sea $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N}(m \in n \vee n \in m \vee n = m)\}$. Veamos que A es inductivo.

  - $0 \in A$. Sea $Q = \{m \in \mathbb{N} \mid 0 \in m \vee m = 0\}$. Veamos que Q es inductivo:

    $0 \in Q$, pues $0 = 0$.

    Supongamos que $m \in Q$.

    $$0 \in m \Rightarrow 0 \in m \subseteq m \cup \{m\} = S(m) \mathrel{\therefore} 0 \in S(m).$$
    $$m = 0 \Rightarrow 0 \in 0 \cup \{0\} = S(0) = S(m) \mathrel{\therefore} 0 \in S(m).$$

    Así pues $S(m) \in Q$. Entonces $\mathbb{N} = Q$, es decir,

    $$\forall m \in \mathbb{N}\,(0 \in m \vee m = 0). \mathrel{\therefore} 0 \in A$$

  - Supongamos que $n \in A$. Sea $m \in \mathbb{N}$

    $$m \in n \underset{n \subseteq S(n)}{\Rightarrow} m \in n \cup \{n\} = S(n).$$
    $$m = n \Rightarrow m = n \in n \cup \{n\} = S(n).$$
    $$n \in m \underset{(LEMA)}{\Rightarrow} S(n) \in S(m) = m \cup \{m\}$$
    $$\therefore S(n) \in m \ \vee \ S(n) = m.$$

Entonces como $m \in n \lor n \in m \lor n = m$, tenemos que:

$$m \in S(n) \lor m = S(n) \lor S(n) \in m.$$

$\therefore S(n) \in A.$

Por lo tanto $\mathbb{N} = A$ (pues $\mathbb{N} = \omega$ está contenido en todo inductivo) es decir:

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \forall m \in \mathbb{N}(m \in n \lor m = n \lor n \in m).$$

iv) $\forall\, M \subseteq \mathbb{N}, M \neq \emptyset\, \exists\, k \in M\, \forall n \in M(k \in n \lor k = n).$

Podemos abreviar $(k \in n \lor k = n\ )$ como $k \underline{\in} n$.

Sea $M \subseteq \mathbb{N}$ y $M \neq \emptyset$. Sea $m \in M$, si consideramos $S(m) \cap M \subseteq S(m)$, claramente $m \in S(m) \cap M \neq \emptyset$ y $S(m) \in \mathbb{N}$ ya que $m \in \mathbb{N}$. Sea k el mínimo de $S(m) \cap M$, con el orden $\in$ en $S(m)$. Entonces k es el $\in$-mínimo de M, pues sea $n \in M$, entonces por la tricotomía ya demostrada (iii), $n \in S(m)$ o $n = S(m)$ o $S(m) \in n$:

$$n \in S(m) \Rightarrow n \in S(m) \cap M \therefore k \in n \lor k = n.$$
$$S(m) \in n \Rightarrow k \underline{\in} m \in S(m) \in n \text{ (pues } m \in S(m) \cap M)$$

de donde se tiene $k \in n$.

$$S(m) = n \Rightarrow k \underline{\in} m \in S(m) = n \therefore k \in n.$$

En todos los casos $k \underline{\in} n$, por lo que k es el $\in$-mínimo de M.□

COROLARIO. $\mathbb{N}$ con $\in$ es un Conjunto con Inducción Fuerte.

Prueba: Se demostró anteriormente que $COBO \Rightarrow COIF$.□

Así pues, se cumple Inducción Fuerte para los números naturales, la cual podemos expresar como:

$$\forall X \subseteq \mathbb{N}\ \big[\forall y \in \mathbb{N}[\forall z(z \in y \Rightarrow z \in X) \Rightarrow y \in X] \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq X\big]$$

donde el segundo símbolo $\in$ expresa la relación "menor"y los demás $\in$ representan pertenencia, aún cuando significan exactamente lo mismo.

O bien como:

$$\forall X \subseteq \mathbb{N}\left[\forall y \in \mathbb{N}[y \subseteq X \Rightarrow y \in X] \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq X\right]$$

COROLARIO. Sean m, n elementos de $\mathbb{N}$. Entonces $m \in n$ si y sólo si $m \subseteq n$ y $m \neq n$.

Prueba: Sean $m, n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$) $m \in n \Rightarrow m \subseteq n$ (por ser n transitivo) pero $m \neq n$ pues $m \in n$ $\therefore$ $m \subseteq n$ y $m \neq n$.

$\Leftarrow$) $m \subseteq n$ y $m \neq n \Rightarrow m \in n \vee n \in m$ (Teorema 8, iii)).

Pero $n \in m \subseteq n \Rightarrow n \in n$ $\overset{\nabla}{\circ}$ $\therefore$ $m \in n$.□

Usaremos indistintamente $\mathbb{N}$ y ω ya que $\mathbb{N} = \omega$ se probó en el Corolario del Teorema 6. Todo lo dicho para $\mathbb{N}$ se puede reescribir con ω.

EJERCICIO. Usando que $< \omega , \in >$ es un COBO o que es un COIF, pruebe el siguiente Principio Especial de Inducción para ω:

$$\forall X \subseteq \omega[\forall n \in \omega \exists m \in X(n \in m) \wedge \forall n \in \omega(s(n) \in X \Rightarrow n \in X) \Rightarrow \omega \subseteq X].$$

EJERCICIOS

1) Probar que para todo conjunto A:
   a) $P(A)$ transitivo $\Rightarrow A$ transitivo.
   b) A transitivo e inductivo $\Rightarrow \bigcup A = A$.
2) Sean:
$$A = \{\{\{\{\emptyset\}, \emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}\}\}$$
$$A' = \{\{\{\emptyset\}, \emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$$
   a) Calcular $\bigcup\bigcap A, \bigcap\bigcup A$ y $\bigcup\bigcap A', \bigcap\bigcup A'$.
   b) Para cualquier conjunto B, en general no se tiene ninguna de las dos contenciones entre $\bigcup\bigcap B$ e $\bigcap\bigcup B$.
3) Sea T un conjunto no vacío de relaciones transitivas, es obvio que $\bigcap T, \bigcup T$ son relaciones.
   a) ¿Es $\bigcap T$ relación transitiva?

b) ¿Es $\bigcup T$ relación transitiva?

4) Sea $< A, r >$ COTO, $f : A \longrightarrow A$ tal que:

$$\forall x, y \in A[x \ r \ y \Rightarrow f(x) \ r \ f(y)]$$

a) Probar que f es inyectiva.

b) Probar el inverso: $\forall x, y \in A[f(x) \ r \ f(y) \Rightarrow x \ r \ y]$.

5) Sea $S(x) = x \cup \{x\}$. Pruebe que:

a) $\forall m, n \in \omega(S(m) = S(n) \Leftrightarrow m = n)$.

b) $\forall m, n \in \omega(S(m) \in S(n) \Leftrightarrow m \in n)$.

2.2 El teorema de recursión para números naturales

TEOREMA DE RECURSIÓN PARA NATURALES

Sea A un conjunto, $a \in A$ y sea $f : A \longrightarrow A$. Entonces hay una única función $h : \omega \longrightarrow A$, tal que:

$$h(0) = a$$
$$h(s(n)) = f(h(n))$$

Consideremos lo que queremos probar:

0) h existe, es decir, que h es un conjunto.

1) Para todo elemento n de ω existe un $x \in A$ tal que $< n, x > \in h$; es decir

$$Dom(h) = \omega, \ \ Im(h) \subseteq A.$$

2) Si $< n, x > \in \ h$ y $< n, y > \ \in \ h$ entonces $x = y$; es decir que h es función.

3) $< 0, a > \in \ h$; es decir que $h(0) = a$

4) Si $< n, x > \in h$ entonces $< s(n), f(x) > \in h$; es decir, que

$$h(s(n)) = f(h(n))$$

5) Que tal función sea única.

Dicho algebraicamente: Para cualquier aplicación $0 \longrightarrow a$, y cualquier $f : A \longrightarrow A$ hay una única extensión que es un homomorfismo

$$h :< \omega, s, 0 > \longrightarrow < A, f, a >,$$

es decir

$$h(s(n)) = f(h(n)) \text{ para toda } n \in \omega \text{ y } h(0) = a$$

Definición. Diremos que v es una función adecuada con respecto a f si :

i) v es función, $dom(v) \subseteq \omega, im(v) \subseteq A$.

ii) Si $0 \in dom(v)$ entonces $v(0) = a$.

iii) Si $s(n) \in dom(v)$ entonces $n \in dom(v)$ y $v(s(n)) = f(v(n))$.

En lo que resta de la demostración diremos que v es función adecuada si lo es con respecto a f.

Sea $\mathbb{A} = \{ v \in P(\omega \times A) \mid v \text{ es función adecuada } \}$

Observación 1. $\{< 0, a >\} \in \mathbb{A}$ con lo que $\mathbb{A} \neq \emptyset$.

Observación 2. $\mathbb{A}$ es un conjunto por Axioma de Separación.

Observación 3. $h = \bigcup \mathbb{A}$ es un conjunto por la Observación 2) y por el Axioma de la Unión.

Observación 4. Aunque $\bigcup \mathbb{A}$ es único por Axioma de Extensionalidad, este no prueba la unicidad de una función h que cumpla el enunciado del teorema, ya que podría haber sido construida de otro modo.

Probaremos ahora que tal conjunto h es una función con dominio ω y cuya imagen está contenida en A y que cumple lo pedido en el enunciado del teorema.

Lema 1. Cualesquiera dos funciones adecuadas son compatibles, es decir, para todas $v, w \in \mathbb{A}$ y para toda $n \in \omega$ se tiene que:

$$n \in dom(v) \cap dom(w) \Rightarrow v(n) = w(n).$$

Prueba: Sean $v, w \in \mathbb{A}$. Es suficiente mostrar que

$$D = \{n \in \omega \mid n \in dom(v) \cap dom(w) \Rightarrow v(n) = w(n)\}$$

es un conjunto inductivo, pues entonces $\mathbb{N} = \omega = D$ y v, w serán compatibles.

- $0 \in D$, pues supongamos que $0 \in dom(v) \cap dom(w)$ como v y w son funciones adecuadas se tiene que $v(0) = a = w(0)$.

- Supongamos $n \in D$ y que $s(n) \in dom(v) \cap dom(w)$, entonces $n \in dom(v) \cap dom(w)$ y por hipótesis inductiva $v(n) = w(n)$. Como v, w son funciones adecuadas $v(s(n)) = f(v(n)) = f(w(n)) = w(s(n))$. Así $s(n) \in D$.□

LEMA 2. La unión arbitraria de funciones adecuadas es una función adecuada.

Prueba: Sea $B \subseteq \mathbb{A}$. Veamos que $\bigcup B$ es función adecuada:

i) Por el Lema 1, B es un sistema compatible de funciones por lo que $\bigcup B$ es una función.

Además $\bigcup B$ es una función que cumple:

$$dom(\bigcup B) = \bigcup_{v \in B} dom(v) \subseteq \omega$$
$$im(\bigcup B) = \bigcup_{v \in B} im(v) \subseteq A$$

ii) Supongamos que $0 \in dom(\bigcup B) = \bigcup_{v \in B} dom(v)$, esto implica que $0 \in dom(v)$ para alguna $v \in B$, de ahí que $v(0) = a$, por lo tanto como $v \subseteq \bigcup B$, tenemos que $(\bigcup B)(0) = v(0) = a$.

iii) Supongamos que $s(n) \in dom(\bigcup B) = \bigcup_{v \in B} dom(v)$, esto implica que $s(n) \in dom(v_0)$ para alguna $v_0 \in B \subseteq \mathbb{A}$, de ahí que $n \in dom(v_0)$ y $v_0(s(n)) = f(v_0(n))$. Como $v_0 \in B$ se tiene $v_0 \subseteq \bigcup B$ y además $dom(v_0) \subseteq \bigcup_{v \in B} dom(v) = dom(\bigcup B)$, por lo cual $n \in dom(\bigcup B)$ y $\bigcup B(s(n)) = v_0(s(n)) = f(v_0(n)) = f(\bigcup B(n))$.□

LEMA 3. Todo número natural está en el dominio de alguna función adecuada. Es decir: para cualquier $n \in \omega$ existe $v \in \mathbb{A}$ tal que $n \in dom(v)$.

Prueba: Basta ver que $E = \{n \in \omega \mid \exists v \in \mathbb{A}(n \in dom(v))\}$ es un conjunto inductivo.

- $0 \in E$ pues $\{< 0, a >\} \in \mathbb{A}$ y $0 \in dom(\{< 0, a >\}) = \{0\}$.

- Supongamos $n \in E$; sea $v \in \mathbb{A}$ tal que $n \in dom(v)$. Sea

$$v' = v \cup \{< s(n), f(v(n)) >\}$$

es obvio que $s(n) \in dom(v')$. Veamos que $v' \in \mathbb{A}$ y en conclusión que $s(n) \in E$.

i) v' es función:

- Si $s(n) \notin dom(v)$ entonces v y $\{< s(n), f(v(n)) >\}$ son funciones compatibles y su unión, que es v' es función.

- Si $s(n) \in dom(v)$ entonces $n \in dom(v)$ y $v(s(n)) = f(v(n))$ por lo que $v' = v \in \mathbb{A}$, es función, además de la definición de $v', dom(v') \subseteq \omega$ y $im(v') \subseteq A$.

ii) Supongamos $0 \in dom(v') = dom(v) \cup \{s(n)\}$. Entonces como $0 \neq s(n)$ tenemos que $0 \in dom(v)$, de donde $v'(0) = v(0) = a$.

iii) Sea $s(m) \in dom(v') = dom(v) \cup \{s(n)\}$. Hay dos casos:

- Si $s(m) \in dom(v)$ entonces $m \in dom(v) \subseteq dom(v')$ y además

$$v'(s(m) \;=\; v(s(m)) = f(v(m)) = f(v'(m)).$$

- Si $s(m) = s(n)$ entonces $m = n$, por lo tanto por hipótesis inductiva, tenemos que $m = n \in dom(v) \subseteq dom(v')$ y de ahí,

$$v'(s(m)) \;=\; v'(s(n)) \;=\; f(v(n)) = f(v(m)) \;=\; f(v'(m)).\square$$

Prueba del Teorema de Recursión (primera versión). Sea $h = \bigcup \mathbb{A}$. Ya se vió que como $\mathbb{A}$ es conjunto, $h = \bigcup \mathbb{A}$ es conjunto por Axioma de Unión. Así pues, $< n, m > \in h$ si y sólo si existe v

$\in \mathbb{A}$ tal que ($n = 0$ y $m = a$) o existe $p \in \omega$ que cumple $p \in dom(v)$, $n = s(p)$ y $m = f(v(p))$

Por Lema 2, h es función adecuada y por Lema 3, $dom(h) = \omega$.

Así $h : \omega \longrightarrow A$ cumple:

$$h(0) = a$$
$$h(s(n)) = f(h(n))$$

Unicidad Sean $h, h' : \omega \longrightarrow A$ que cumplen

$$h(0) = h'(0) = a$$
$$h(s(n)) = f(h(n)),\ h'(s(n)) = f(h'(n))$$

Entonces como $dom(h) = dom(h') = \omega$, para cualquier $n \in \omega$, se tiene $n \in dom(h) \cap dom(h')$ de donde por Lema 1, $h(n) = h'(n)$ para toda $n \in \omega$. Así pues $h = h'_{\square}$

EJERCICIO. Sea $f : A \longrightarrow A$ y $a \in A$. Entonces por el Teorema de Recursión existe una única función $h : \omega \longrightarrow A$ tal que

$$h(0) = a$$
$$h(s(n)) = f(h(n))$$

Pruebe que si f es inyectiva y $a \notin im(f)$, entonces h es inyectiva.

EJERCICIO

a) Probar que hay una única función $g : \omega \longrightarrow \omega$ tal que,

$$g(0) = 2$$
$$g(s(n)) = 3 + (g(n))$$

para toda $n \in \omega$.

b) Dar un definición explícita de la función g anterior (es decir,

una definición no recursiva) que debe ser de la forma

$$g(m) = n \Leftrightarrow ....$$

o bien

$$g = \{ < m, n > | ....\}$$

donde "...."indica una expresión rigurosa y precisa donde no ocurre "g".

Prueba del Teorema de Recursión (segunda versión). Sea

$$B = \{G \in P(\omega \times A) \mid < 0, a > \in G \text{ y } \forall n \in \omega \forall x \in A$$

$$(< n, x > \in G \Rightarrow < s(n), f(x) > \in G)\}$$

Observación 1. $B \neq \emptyset$ pues $(\omega \times A) \in B$, por lo tanto $\bigcap B$ es un conjunto.

Observación 2. B es un conjunto. Aunque esto no es necesario para que $\bigcap B$ sea un conjunto, por Teorema 2.

Observación 3. Si definimos $g : \omega \times A \longrightarrow \omega \times A$ tal que para toda $n \in \omega$ y $x \in A$, $g(< n, x >) = < s(n), f(x) >$, es claro que es función pues s, f son funciones respectivamente. Podemos pensar a cada $G \in B$, como un conjunto generado o que contiene a lo generado a partir de $\{< 0, a >\}$ por la operación g, es decir como el mínimo conjunto generado por g a partir de $< 0, a >$. Sea $h = \bigcap B$. Es fácil ver que h satisface $< 0, a > \in h$ y que $< n, x > \in h$ implica $< s(n), f(x) > \in h$.

Obsérvese que: $h(x) = y \Leftrightarrow < x, y > \in G$ para todo $G \in B$. Es obvio que $im(h) \subseteq A$.

Sólo resta mostrar que 1) $dom(h) = \omega$ y 2) h es función.

1) Es obvio que $dom(h) \subseteq \omega$. Veamos que $dom(h)$ es inductivo:
   - i) $0 \in dom(h)$ pues $< 0, a > \in h$.
   - ii) Supongamos $n \in dom(h)$ entonces podemos encontrar $x \in A$ tal que $< n, x > \in h$ pero entonces por la propiedad satisfecha por h, $< s(n), f(x) > \in h$ de donde $s(n) \in dom(h)$.

Así pues $\omega = dom(h)$.

2) Es suficiente ver que

$F = \{n \in \omega \mid \forall x, y < n, x > \in h$ y $< n, y > \in h \Rightarrow x = y\}$

es un conjunto inductivo:

i) $0 \in F$ pues si hubiese $x \neq y$ tales que $< 0, x > \in h$ y también $< 0, y > \in h$ entonces $a \neq x$ o $a \neq y$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $a \neq x$ y sea $h' = h - \{< 0, x >\}$. Se observa que $h' \subseteq h$.

h' cumple $< 0, a > \in h'$ pues $< 0, a > \in h - \{< 0, x >\}$ ya que $x \neq a$.

h' satisface $< n, w > \in h \Rightarrow < s(n), f(w) > \in h'$ pues supongamos $< n, w > \in h'$ entonces $< n, w > \in h$ por lo tanto $< s(n), f(w) > \in h$, pero como $< s(n), f(w) > \neq < 0, x >$ pues $0 \neq s(n)$ para toda $n \in \omega$, se tiene $< s(n), f(w) > \in h'$.

Así pues $h' \in B$ y $h' \underset{\neq}{\subseteq} h$ y $h' \neq h$. $\overset{\nabla}{\circ}$ (Contradice la definición de $h = \bigcap B$). Por lo tanto $0 \in F$.

ii) Supongamos $n \in F$. Entonces $n \in \omega$ y por 1) $n \in dom(h)$ por lo tanto hay un único $x \in A$ tal que $< n, x > \in h$.

Sabemos que $< s(n), f(x) > \in h$. Supongamos ahora $< s(n), w > \in h$ y $w \neq f(x)$.

Sea $h' = h - \{< s(n), w >\}$. Veamos que $h' \in B$:

h' satisface $< 0, a > \in h'$ pues $< s(n), w > \neq < 0, a >$.

h' satisface $< m, v > \in h' \Rightarrow < s(m), f(v) > \in h'$ pues supongamos $< m, v > \in h'$, entonces $< m, v > \in h$ por lo cual $< s(m), f(v) > \in h'$.

- Si $s(m) \neq s(n)$ entonces $< s(m), f(v) > \neq < s(n), w >$ por lo tanto $< s(m), f(v) > \in h'$.

- Si $s(m) = s(n)$ entonces $m = n$, por lo tanto $< m, v > = < n, v >$ pero $n \in F$, entonces $v = x$, $< s(m), f(v) > = < s(m), f(x) >$ por ser f función. Como $f(x) \neq w$ entonces $< s(m), f(v) > \in h'$. Así pues $h' \in B$ y $h' \subseteq h = \bigcap B$ pero $h' \neq h$ $\overset{\nabla}{\circ}$ Por lo tanto $w = f(x)$ y $s(n) \in F$.

De lo anterior, F es inductivo, $\omega = F$ y h es función.

Unicidad: Sean h, h' funciones que cumplen:

0) h existe; es decir, que h es un conjunto.
1) Para todo elemento $n \in \omega$ existe $< n, y > \in h$; es decir,

$$dom(h) = \omega,\ im(h) \subseteq A$$

2) Si $< n, x > \in h$ y $< n, y > \in h$ entonces $x = y$; es decir que h es función.
3) $< 0, a > \in h$; es decir que $h(0) = a$.
4) Si $< n, x > \in h$ entonces $< s(n), f(x) > \in h$; es decir, que

$$h(s(n)) = f(h(n))$$

Sea $D = \{n \in \omega \mid h(n) = h'(n)\} \subseteq \omega$. Veamos que D es inductivo:
- $0 \in D$; por 3, $h(0) = a = h'(0)$.
- Si $k \in D$ entonces $h(k) = h'(k)$; por 4, $h(s(k)) = h'(s(k))$ pues $f(h(k)) = f(h'(k))$ por lo tanto $s(k) \in D$.

Así D es inductivo, $\omega = D$ y para toda $n \in D$, $h(n) = h'(n)$ por lo que

$$h = h' \qquad \square$$

EJERCICIO. Sea $h = \bigcap B$, como en la prueba anterior; demuestre que:

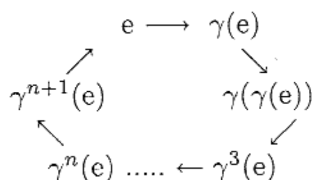
i) $< 0, a > \in h$
ii) $< n, x > \in h \Rightarrow < s(n), f(x) > \in h$

EJERCICIO. Sean $< A, r >, < B, s >$ $COTRI$ y $COPO$ respectivamente, y sea $f : A \longrightarrow B$ tal que $\forall\ x, y \in A(x\ r\ y \Rightarrow f(x)\ s\ f(y))$. Entonces probar que:

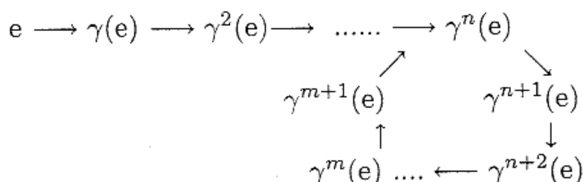
i) f es inyectiva.
ii) $\forall x, y \in A\,(x\ r\ y \Leftrightarrow f(x)\ s\ f(y))$

2.3 SISTEMAS DE PEANO

Un sistema de Peano es una terna $< \mathsf{N}, \gamma, e >$ constituida por un conjunto N de objetos, una función γ de un argumento y un elemento e $\in \mathsf{N}$ que se comportan como los números naturales: cualquier elemento es, o "el cero"o es "un sucesor". Pero podría pensarse así, si e es "el cero"y γ es la "función sucesor":



o así



o así

$$e \longrightarrow \gamma(e) \longrightarrow \gamma^2(e) \longrightarrow \gamma^3(e) \longrightarrow \ldots\ldots \longrightarrow \gamma^n(e)$$

o así

$e \longrightarrow \gamma(e) \longrightarrow \gamma^2(e) \longrightarrow \gamma^3(e) \longrightarrow \gamma^4(e) \ldots \longrightarrow \gamma^n(e) \longrightarrow \gamma^{n+1}(e) \longrightarrow \ldots\ldots\ldots$

¿Qué queremos?

1) Que $e \in \mathsf{N}$

2) Que γ esté definida en todo N y que sea función con valores en N, es decir:

$$\forall x \in \mathsf{N}\ \exists! y \in \mathsf{N} \text{ tal que } < x, y > \in \gamma.$$

Además:

3) $\forall x \in$N $e \neq \gamma(x)$, es decir $e \notin im(\gamma)$.

4) $\gamma^n(e) \neq \gamma^m(e)$ si $n \neq m$ ó $\gamma(x) \neq \gamma(y)$ si $x \neq y$. Es decir, γ inyectiva.

5) $\forall A \subseteq$N $[e \in A$ y $\gamma[A] \subseteq A \Rightarrow A =$ N$]$ (Inducción).

Para que sea único salvo isomorfismo, i.e. sea como los naturales.

Observación. Si se cumple 1), 2), 3) y 4), N será infinito.

Consideremos ω, $s : \omega \longrightarrow \omega$, $0 \in \omega$; entonces podemos considerar la terna $< \omega, s, 0 >$. Ya sabemos que esta terna cumple 1), 2), 3), 4) y 5). Cabe recordar que $s = \{< n, n \cup \{n\} >| \ n \in \omega\}$ y $0 = \emptyset$.

DEFINICIÓN. Un sistema de Peano es una terna <N,γ,e> tal que: N es un conjunto, γ:N$\longrightarrow$N (es decir $\gamma \subseteq$ N$\times$N y γ es función con $dom(\gamma) =$ N y $im(\gamma) \subseteq$ N), y $e \in$N tales que:

i) $e \notin im(\gamma)$.

ii) γ es inyectiva.

iii) $\forall A \subseteq$ N$[e \in A$ y $\gamma[A] \subseteq A \Rightarrow$ N $= A]$.

Si se cumple $e \in A$ y $\gamma[A] \subseteq A$, decimos que A es e-γ-inductivo.

TEOREMA 9. $< \omega, s, 0 >$ es un sistema de Peano.

Ya se probó: Teorema 7. Además se probó que $< \omega,\in>$ es $COBO$, y que s es compatible con $\in$: $n \in m \Leftrightarrow s(n) \in s(m)$.

2.3.1. Unicidad de sistemas de Peano

Teorema 10. Sea $<\mathsf{N},\gamma,e>$ un sistema de Peano, entonces $<\omega,s,0>$ es isomorfo a $<\mathsf{N},\gamma,e>$. Es decir, hay una función $h:\omega\longrightarrow\mathsf{N}$ tal que es inyectiva y suprayectiva y "preserva la estructura", es decir:

$$1)\ h(s(n))=\gamma(h(n))$$
$$2)\ h(0)=e$$

Prueba: Como γ:N$\longrightarrow$N y $e\in\mathsf{N}$, por el Teorema de Recursión para naturales, hay una única $h:\omega\longrightarrow\mathsf{N}$ tal que:

$$\text{i) } h(0)=e$$
$$\text{ii) } \forall n\in\omega(h(s(n))=\gamma(h(n)))$$

Como γ es inyectiva y $e\notin im(\gamma)$, por un ejercicio anterior (después de la prueba del Teorema de Recursión), la h es inyectiva. Sólo falta ver que h es suprayectiva, es decir, $im(h)=\mathsf{N}$. Sabemos que $im(h)\subseteq\mathsf{N}$, veamos que $im(h)$ es e-γ-inductivo:

i) $e\in im(h)$, pues $e=h(0)$.

ii) Sea $x\in im(h)$, de aquí $x=h(n)$ para algún $n\in\omega$. Entonces como γ es función $\gamma(x)=\gamma(h(n))=h(s(n))\in im(h)$.

Así pues, por el inciso iii) de la definición de Sistema de Peano, se tiene $im(h)=\mathsf{N}$

Ejercicio. Si $<\mathsf{N},\gamma,e>$ es un Sistema de Peano, entonces:

$$Im(\gamma)=\mathsf{N}-\{e\}$$

Veamos ahora una caracterización del orden de los números naturales, utilizando el Teorema de Recursión.

Teorema 11. Sea $A\neq\emptyset$, $\tau\subseteq A\times A$. Si $<A,\tau>$ cumple:

i) A no tiene τ-máximo, es decir $\forall x\in A\,\exists y\in A(x\ \tau\ y)$.

ii) $<A,\tau>$ es *COBO*.

iii) Todo subconjunto no vacío acotado de A, tiene τ-máximo. Es decir, $\forall B\subseteq A$ si $B\neq\emptyset$ tal que $\exists y\in A\forall x\in B(x\ \tau\ y\ o\ x=y)$, entonces

$$\exists x \in B\, \forall z \in B(z\; \tau\; x \text{ o } z = x).$$

Entonces $< A, \tau > \cong < \omega, \in >$
Prueba: Sea a el τ-mínimo de A. Sea $f : A \longrightarrow A$ tal que

$$\forall x \in A,\; f(x) \text{ es el } \tau\text{-mínimo de } \{y \in A \mid x\; \tau\; y\} \subseteq A.$$

Obsérvese que a existe y f está bien definida por las hipótesis i) y ii). Por el Teorema de Recursión, existe una única $h : \omega \longrightarrow A$ tal que:

i) $h(0) = a$.
ii) $h(s(n)) = f(h(n))$.

Obsérvese que: $\forall x \in A, x\; \tau\; f(x)$ por definición de $f(x)$, por lo tanto

$$\forall n \in \omega[h(n)\; \tau\; f(h(n)) = h(s(n))]$$

dado que $\forall n \in \omega(h(n) \in A)$ y por la propiedad recursiva de h. Así pues tenemos $[h(n)\; \tau\; h(s(n))]$ para toda $n \in \omega$.

Veamos que h es isomorfismo:

1) $\forall m, n \in \omega\; [m \in n \Rightarrow h(m)\; \tau\; h(n)]$. Basta ver que el conjunto

$$D = \{n \in \omega \mid \forall m\, (m \in n \Rightarrow h(m)\, \tau\, h(n))\}$$

es inductivo:
   i) $0 \in D$ pues $\forall m \in \omega(m \notin 0)$.
   ii) Supongamos $n \in D$. Sea $m \in \omega$ tal que $m \in s(n) = n \cup \{n\}$.
      - Si $m \in n$ entonces como $n \in D$ se tiene $h(m)\; \tau\; h(n)\; \tau\; h(s(n))$
      - Si $m = n$ entonces por ser h función $h(m) = h(n)\; \tau\; h(s(n))$
      en cualquier caso se tiene $s(n) \in D$.

2) h es inyectiva y $\forall m, n \in \omega(m \in n \Leftrightarrow h(m)\tau h(n))$ por 1) y por ser $< \omega, \in >$ y $< A, \tau >$ *COTOS*. Véase ejercicio anterior a la sección 2.3.

3) Veamos finalmente que h es suprayectiva; es decir, $im(h) = A$. Si no fuese así, $A - im(h) \neq \emptyset$. Sea pues p el τ-mínimo de

$A - im(h)$. Entonces $B = \{q \in A \mid q \,\tau\, p\}$ está acotado superiormente por p y $B \subseteq im(h)$. Además $B \neq \emptyset$ (si no, p sería mínimo de A y entonces $p = a = h(0) \in im(h)$ $\overset{\nabla}{\circ}$).
Sea pues q el τ-máximo de B (existe por hipótesis iii)). Como $q \,\tau\, p$, ya sabemos que $q \in im(h)$, es decir, $q = h(m)$ para algún $m \in \omega$. Pero obsérvese que p es el mínimo elemento de A mayor que q.
Es decir $p =$ mínimo de $\{x \in A \mid q \,\tau\, x\}$ (pues si hubiese $p' \,\tau\, p$ con p' el mínimo se tendría $q \,\tau\, p' \,\tau\, p$ y q no sería máximo de B $\overset{\nabla}{\circ}$). Por lo anterior,

$$p = f(q) = f(h(m)) = h(s(m)) \in im(h) \overset{\nabla}{\circ}$$

así que $im(h) = A$.
Tenemos pues que h es un isomorfismo y $< \omega, \in > \cong < A, \tau >$.□

2.4 ARITMÉTICA EN LOS NATURALES

TEOREMA 12. Hay una única operación $+ : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$ tal que:

$$\forall m \in \omega(m + 0 = m)$$
$$\forall m, n \in \omega(m + s(n) = s(m + n)).$$

Prueba: Sea $m \in \omega$. Inmediato del Teorema de Recursión con $A = \omega, a = m,\ f = s$

$$\exists!\, m + (\ ) : \omega \longrightarrow \omega$$

tal que lo cumple.

Ahora definimos $+ : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$ tal que

$$\forall n, m \in \omega(m + n = m + (n))$$

Queda claro que esta función es única también por el Teorema de Recursión.□

COROLARIO. $\forall m \in \omega(m + 1 = s(m))$.
Prueba: Considérese $m + (\ ) : \omega \longrightarrow \omega$. Se tiene entonces:

$$m+1 = m+(1) = s(m+0) = s(m).$$

TEOREMA 13. Hay una única operación $\cdot : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$ tal que:

$$\forall m \in \omega(m \cdot 0 = 0)$$
$$\forall m, n \in \omega(m \cdot s(n) = m + (m \cdot n))$$

Prueba: Sea $m \in \omega$.

Inmediato del Teorema de Recursión con $A = \omega, a = 0,\ f = m+()$,

$$\exists!\ m \cdot (\ ) : \omega \longrightarrow \omega$$

tal que lo cumple.

Ahora definimos $\cdot : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$ tal que $\forall n, m \in \omega(m \cdot n = m \cdot (n))$.

COROLARIO. $\forall m \in \omega(m \cdot 1 = m)$.

Prueba:

$$m \cdot 1 = m \cdot (1) = m \cdot (s(0)) = m + (m \cdot 0) = m + 0 = m.$$

EJERCICIOS

1) La operación $+ : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$ es conmutativa, asociativa y 0 es neutro.

2) La operación $\cdot : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$ es conmutativa, asociativa y 1 es neutro.

3) Distributividad: $\forall m, n, p \in \omega(m \cdot (n+p) = m \cdot n + m \cdot p)$.

4) Compatibilidad de $+$ con el orden:
$$\forall m, n, p \in \omega(\ m < n \ \Rightarrow\ m+p < n+p).$$

5) Justificar la definición Exp: $\omega \times \omega \longrightarrow \omega$ tal que
$$Exp(m, 0) = 1 \text{ y}$$
$$Exp(m, s(n)) = m \cdot Exp(m, n).$$

2.5 VARIANTES DEL TEOREMA DE RECURSIÓN

Variante 1. (Cuando depende de $s(n)$). Sean A un conjunto, $a \in A$, y $g : A \times \omega \longrightarrow A$. Entonces hay una única función $h : \omega \longrightarrow A$ tal que:

$$h(0) = a$$
$$h(s(n)) = g(h(n), s(n))$$

Prueba: Como la de la versión anterior, adaptando la definición de función adecuada.□

Compárese esta variante con la versión primera y obsérvese que es más general en el hecho de que permite que la función para $s(n)$ pueda depender del mismo $s(n)$, además de depender del valor de la función para n.

Aplicación: con $A = \omega, a = 1$ y $g(m,n) = m \cdot n$, $\exists! h$ llamada función factorial tal que:

$$h(0) = 1$$
$$h(s(n)) = h(n) \cdot s(n)$$

Variante 2 (Cuando depende de dos anteriores). Sea A un conjunto, $a_0, a_1 \in A$ y $g : A \times A \longrightarrow A$. Entonces hay una única función $h : \omega \longrightarrow A$ tal que:

$$h(0) = a_0$$
$$h(1) = a_1$$
$$h(s(s(n))) = g(h(s(n)), h(n))$$

Prueba: Como la original, adaptando la definición de función adecuada.□

Aplicación: la Sucesión de Fibonacci, con $A = \omega$, $a_0 = a_1 = 1$, $g(m,n) = m + n$, $\exists!$ h tal que:

$$h(0) = 1$$
$$h(1) = 1$$
$$h(s(s(n))) = h(n) + h(s(n))$$

La sucesión h es: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...$

Observación. La variante 1 implica la versión primera, con g definida como $g(x, n) = f(x)$. La variante 2 también implica la versión primera, con g definida como $g(x, y) = f(x), a_0 = a$ y $a_1 = f(a_0)$.

Versión general. Sean A un conjunto, $S = \bigcup_{n \in \omega} {}^n A$ (todas las sucesiones finitas de elementos de A). Sea $g : S \longrightarrow A$ función. Entonces existe una única $h : \omega \longrightarrow A$ tal que:

$$\forall n \in \omega (h(n) = g(h \mid_n)).$$

En particular:
$h(0) = g(h \mid_0) = g(0) \in A$
$h(s(0)) = g(h \mid_{s(0)}) = g(\{< 0, g(0) >\}) \in A$
$h(s(s(0))) = g(h \mid_{s(s(0))}) =$
$$g(\{< 0, g(0) >, < s(0), g(\{< 0, g(0) >\}) >\})$$
Prueba: Considérese $\emptyset \in S$ y definamos $G : S \times \omega \longrightarrow S$ tal que:
Dado $< x, m > \in S \times \omega$,

$$G(< x, m >) = \begin{cases} \{< m, g(x) >\} & \text{Si } m = 0 \\ x \cup \{< n, g(x) >\} & \text{Si } m = s(n) \text{ y } x \in {}^n A \\ \emptyset & \text{Si } m = s(n) \text{ y } x \notin {}^n A \end{cases}$$

Por Teorema de Recursión (Variante 1) hay una única función $F : \omega \longrightarrow S$ tal que:

$$F(0) = \emptyset$$
$$F(s(n)) = G(F(n), s(n)) = F(n) \cup \{< n, g(F(n)) >\}$$

Sea $h = \bigcup_{n \in \omega} F(n)$, se puede verificar por inducción que:

$$\forall n \in \omega (F(n) : n \longrightarrow A)$$

así que $dom(h) = dom(\bigcup_{n \in \omega} F(n)) = \bigcup_{n \in \omega} dom(F(n)) = \bigcup_{n \in \omega} n = \omega$ y $im(h) = im(\bigcup_{n \in \omega} F(n)) = \bigcup_{n \in \omega} im(F(n)) \subseteq A$.

Así $F(n) = h\mid_n$ y $h(n) = [(\bigcup_{n \in \omega} F(n))](n) = F(s(n))(n) = g(F(n)) = g(h\mid_n)$.□

Observación. La variante 2. del Teorema de Recursión se puede demostrar a partir de esta versión General.

Algunas veces definimos funciones de dos variables usando recursión, por ejemplo funciones de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en un conjunto A, una de las variables se considera un parámetro.

TEOREMA DE RECURSIÓN (Versión paramétrica). Sean A y P conjuntos cualesquiera y $\alpha : P \longrightarrow A$ y $g : P \times A \times \omega \longrightarrow A$ funciones. Entonces hay una única función
$h : P \times \omega \longrightarrow A$ tal que:

$$\forall p \in P(h(p,0) = \alpha(p))$$
$$\forall p \in P(h(p,s(n)) = g(p,h(p,n),s(n)))$$

Prueba 1: Versión paramétrica de la prueba original con una definición paramétrica de función adecuada.□

Prueba 2: Consideremos

$$\alpha \in {}^{P}A = \{f \mid f : P \longrightarrow A\},\ G :\ {}^{P}A \times \omega \longrightarrow {}^{P}A$$

tal que

$$G(x,n)(p) = g(p,x(p),n)$$

Entonces por el Teorema de Recursión (Variante 1) hay una única función
$F : \omega \longrightarrow {}^{P}A$ tal que:

$$F(0) = \alpha$$
$$F(s(n)) = G(F(n),s(n))$$

Ahora sí, definimos:

$$\forall p \in P\ \forall m \in \omega(h(p,m) = F(m)(p))$$

Así $\forall p \in P(h(p,0) = F(0)(p) = \alpha(p))$.
$\forall p \in P \forall n \in \omega\ (h(p,s(n)) = F(s(n))(p) =$
$G(F(n),s(n))(p) = g(p,F(n)(p),s(n)) = g(p,h(p,n),s(n)))$.□

Unicidad Sean h, h' que cumplen lo anterior. Entonces $dom(h) = \omega = dom(h')$. Veamos que $\forall n \in \omega$, $h(n) = h'(n)$:

$(\ n = 0)\qquad h(0) = g(h\mid_0) = g(\emptyset) = g(h'\mid_0) = h'(0)$

H.I. Suponemos $\forall m \leq n$, $h(m) = h'(m)$. En particular como $\forall m < n$ $h(m) = h'(m)$ tenemos que $h\mid_n = h'\mid_n$ y para n tenemos $h(n) = h'(n)$.

(Para $n+1$)

$$\begin{aligned} h(n+1) &= g(h\mid_{n+1}) = g(h\mid_n \cup \{< n, g(h\mid_n) >\}) \\ &= g(h'\mid_n \cup \{< n, g(h'\mid_n) >\}) = g(h'\mid_{n+1}) \\ &= h'(n+1). \square \end{aligned}$$

3 EQUIPOTENCIA, FINITUD, DOMINANCIA Y ARITMÉTICA CARDINAL

3.1 EQUIPOTENCIA

¿El conjunto de todos los espectadores de una función de teatro, tiene el mismo número de elementos que el conjunto de todos los asientos del teatro?

Para saber la respuesta, el acomodador no necesita contar a los espectadores ni a los asientos !

Podemos definir la relación "los conjuntos A y B tienen el mismo número de elementos" sin saber nada acerca de números.

Lo único que necesitamos hacer es establecer una correspondencia uno a uno entre todos los elementos de A y todos los elementos de B.

DEFINICIÓN. Un conjunto A es equipotente a un conjunto B sii hay una biyección de A sobre B.

NOTACIÓN. Si A es equipotente a B, lo denotamos $A \sim B$.
En símbolos:

$A \sim B \underset{\text{DEF}}{\Leftrightarrow} \exists f$ (f es función inyectiva $\wedge$ $dom(f) = A \wedge$ $im(f) = B$).

EJEMPLOS

- $\mathbb{R}^+ \sim \mathbb{R}^-$ con $f(x) = -x \; \forall x \in \mathbb{R}^+$

- $\omega \sim \mathbb{Z}$ con $f(n) = \begin{cases} -\frac{n+1}{2} & \text{Si } n \text{ es impar} \\ \frac{n}{2} & \text{Si } n \text{ es par} \end{cases}$
- $\omega \sim \{2n \mid n \in \omega\}$ (Pares) con $f(n) = 2n$
- $\omega \sim \{n^2 \mid n \in \omega\}$ con $f(n) = n^2$ (*Galileo*, 1638)
- $(0,1) \sim \mathbb{R}$ con $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2x} & \text{Si } 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2-2x} - 1 & \text{Si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$, o con

$g(x) = \tan\left(\frac{\pi(2x\text{-}1)}{2}\right) = \tan\left(\pi(x - \frac{1}{2})\right)$

Observación $g(\frac{5}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \in$ Irracionales

- $\omega \times \omega \sim \omega$ con: $J(< m, n >) = \frac{1}{2}((m+n)^2 + 3m + n)$ ó con: $g(< m, n >) = 2^m(2n+1) - 1$

PROPOSICIÓN 1. Para cualesquiera conjuntos A, B, C :

a) $A \sim A$

b) Si $A \sim B$ entonces $B \sim A$.

c) Si $A \sim B$ y $B \sim C$ entonces $A \sim C$.

Prueba:

a) Id_A es biyección de A sobre A

b) Si $A \underset{f}{\sim} B$ entonces f^{-1} es biyección de B sobre A

c) Si $A \underset{f}{\sim} B$ y $B \underset{g}{\sim} C$ entonces $g \circ f$ es biyección de A sobre C.□

Así la relación $\sim$ es una relación de equivalencia sobre el universo V de todos los conjuntos.

Debe ser claro que:

$$\{< A, B > \mid A \sim B\}$$

no es un conjunto, pues si lo fuera, su campo, su dominio y su imagen que es V sería conjunto $\overset{\nabla}{\circ}$

Así pues, es una clase propia y podemos llamarle relacional para diferenciarla de las relaciones, que son conjuntos.

Otros ejemplos

- $(0,1) \sim \mathbb{R}$

Otras formulaciones de la misma

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2x} = \frac{2x-1}{2x} = \frac{x-\frac{1}{2}}{x} & \text{Si } 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2-2x} - 1 = \frac{2x-1}{2-2x} = \frac{x-\frac{1}{2}}{1-x} & \text{Si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{2x-1}{1-\mid 2x-1 \mid}$$

Observación. f lleva racionales en racionales e irracionales en irracionales.

$x \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(x) = \frac{2x-1}{2x} = \frac{2\frac{p}{q}-1}{2\frac{p}{q}} = \frac{2p-q}{2p} \in \mathbb{Q}$, $p,q \in \mathbb{Z}$ $q \neq 0$

$f(x) \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(x) = \frac{2x-1}{2x} = \frac{p}{q} \underset{p,\, q \in Z\ q \neq 0}{\Rightarrow} 2xp = 2xq - q \Rightarrow$

$2x(p-q) = -q \Rightarrow x = \frac{-q}{2(p-q)} \in \mathbb{Q}$

- $(0,1) \underset{g}{\sim} (-1,1) \underset{h}{\sim} \mathbb{R}$ $\quad g(x) = 2x-1,\ h(x) = \frac{x}{1-\mid x \mid}$

  $f = h \circ g : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$

  f, g, h son biyecciones y llevan racionales en racionales.

- $[0,1] \underset{h}{\sim} (0,1)$, donde h esta definida como sigue:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{Si } x = 0 \\ \frac{1}{n+2} & \text{Si } x = \frac{1}{n},\ n > 0 \\ x & \text{Si } x \neq 0, x \neq \frac{1}{n},\ n > 0 \end{cases}$$

- $\omega \sim \mathbb{Q}$ $\quad$ Biyección: $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, -1, -2, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots\ldots$

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
\cdots & \frac{-4}{1} & \leftarrow & \frac{-3}{1} & & \frac{-2}{1} & \leftarrow & \frac{-1}{1} & & \frac{0}{1} & \rightarrow & \frac{1}{1} & & \frac{2}{1} & \rightarrow & \frac{3}{1} & & \frac{4}{1} & \rightarrow & \frac{5}{1} & \cdots \\
 & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & \\
\cdots & \frac{-4}{2} & & \frac{-3}{2} & & \frac{-2}{2} & & \frac{-1}{2} & \leftarrow & \frac{0}{2} & \leftarrow & \frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & & \frac{5}{2} & \cdots \\
 & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & & & & & & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & \\
\cdots & \frac{-4}{3} & & \frac{-3}{3} & & \frac{-2}{3} & \rightarrow & \frac{-1}{3} & \rightarrow & \frac{0}{3} & \rightarrow & \frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & & \frac{5}{3} & \cdots \\
 & \downarrow & & \uparrow & & & & & & & & & & & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & \\
\cdots & \frac{-4}{4} & & \frac{-3}{4} & \leftarrow & \frac{-2}{4} & \leftarrow & \frac{-1}{4} & \leftarrow & \frac{0}{4} & \leftarrow & \frac{1}{4} & \leftarrow & \frac{2}{4} & \leftarrow & \frac{3}{4} & & \frac{4}{4} & & \frac{5}{4} & \cdots \\
 & \downarrow & & & & & & & & & & & & & & & & \uparrow & & \downarrow & \\
\cdots & \frac{-4}{5} & \rightarrow & \frac{-3}{5} & \rightarrow & \frac{-2}{5} & \rightarrow & \frac{-1}{5} & \rightarrow & \frac{0}{5} & \rightarrow & \frac{1}{5} & \rightarrow & \frac{2}{5} & \rightarrow & \frac{3}{5} & \rightarrow & \frac{4}{5} & & \frac{5}{5} & \cdots \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \downarrow & \\
\cdots & \frac{-4}{6} & \leftarrow & \frac{-3}{6} & \leftarrow & \frac{-2}{6} & \leftarrow & \frac{-1}{6} & \leftarrow & \frac{0}{6} & \leftarrow & \frac{1}{6} & \leftarrow & \frac{2}{6} & \leftarrow & \frac{3}{6} & \leftarrow & \frac{4}{6} & \leftarrow & \frac{5}{6} & \cdots \\
 & \vdots & & & & & & & & & & & & & & & & & & \vdots &
\end{array}
$$

- $(0,1) \times (0,1) \underset{f}{\sim} (0,1)$

Donde la idea para f es que para cada $(a,b) \in (0,1) \times (0,1)$ en notación decimal $(a,b) = (0.a_0a_1a_2a_3a_4a_5.....\ ,\ 0.b_0b_1b_2b_3b_4b_5...)$, $f(< a,b >) = 0.a_0b_0a_1b_1a_2b_2.....$

EJERCICIO. Justificar con detalle esta idea; por ejemplo, que la representación decimal sea única.

EJERCICIO. Verificar que $\omega \times \omega \underset{g}{\sim} \omega$, donde

$$g(< m,n >) = 2^m(2n+1) - 1$$

PROPOSICIÓN 2. Para todo conjunto A, $P(A) \sim {}^{A}2$
Prueba: Denotamos ${}^{A}2 = \{\ f \mid\ f : A \longrightarrow 2\}$
Definimos una función $h : P(A) \longrightarrow {}^{A}2$ que sea biyección:
Para cada $B \subseteq A$, sea $h(B)$ la función caracteristica de B, χ_B, es decir la función $\chi_B : A \longrightarrow 2$ tal que:

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{Si } x \in B \\ 0 & \text{Si } x \notin B \end{cases}$$

Sea pues $h(B) = \chi_B$.

- Si $B \neq B'$, $\exists\, x \in B - B'$ ó $\exists\, x \in B' - B$, por lo tanto,

$$h(B) = \chi_B \neq \chi_{B'} = h(B')$$

- Si $g \in {}^A2$ entonces $g = h(\{\, x \in A \mid g(x) = 1\})$.□

PROPOSICIÓN 3. Para todo conjunto A y todo z, se cumple:

$$A \sim A \times \ \{z\}$$

Prueba: con $f(y) = < y, z >, \forall y \in A$.

PROPOSICIÓN 4

a) Si $A \sim B$ y $C \sim D$ entonces $A \times C \sim B \times D$.
Sean $A \underset{f}{\sim} B$ y $C \underset{g}{\sim} D$. Entonces definimos:
$h : A \times C \longrightarrow B \times D$, como $h(< x, y >) = < f(x), g(y) >$.
Claramente es biyección.

b) Si $A \sim B$ y $C \sim D$ entonces ${}^AC \sim {}^BD$
Si $A \underset{f}{\sim} B$ y $C \underset{g}{\sim} D$, definimos $G : {}^AC \longrightarrow {}^BD$, como $G(h) : B \longrightarrow D$, $G(h) = g \circ h \circ f^{-1}$, así ${}^AC \underset{G}{\sim} {}^BD$.
G Inyectiva: $h \neq \ h' \Rightarrow \exists x \in A, h(x) \neq h'(x)$, por lo tanto:

$$G(h)(f(x)) = g \circ h \circ f^{-1}(f(x)) = g(h(x)) \neq g(h'(x)) = \\ g \circ h' \circ f^{-1}(f(x)) = G(h')(f(x))$$

por lo tanto $G(h) \neq G(h')$.
G Suprayectiva: Si $j \in {}^BD$ entonces $g^{-1} \circ j \circ f \in {}^AC$, y
$G(g^{-1} \circ j \circ f) = g \circ g^{-1} \circ j \circ f \circ f^{-1} = j$

c) Si $A \sim B$ y $C \sim D$ entonces $A \times \{0\} \cup C \times \{1\} \sim B \times \{0\} \cup D \times \{1\}$. Sean $A \underset{f}{\sim} B$ y $C \underset{g}{\sim} D$.
Definimos $h : A \times \{0\} \cup C \times \{1\} \longrightarrow B \times \{0\} \cup D \times \{1\}$,tal que,

$\forall <x,b> \in A \times \{0\} \cup C \times \{1\}$,

$$h(<x,b>) = \begin{cases} <f(x),0> & Si <x,b> \in A \times \{0\} \\ <g(x),1> & Si <x,b> \in C \times \{1\} \end{cases}$$

Es fácil ver que h es biyección.□

d) Si $A \sim B$ entonces $P(A) \sim P(B)$.

Si $A \underset{f}{\sim} B$, sea $g : P(A) \longrightarrow P(B)$, tal que $\forall c \subseteq A, g(c) = f[c]$.

Entonces, si $c \neq c' \Rightarrow \exists x \in (c - c' \cup c' - c)$, por lo tanto, $f(x) \in f[c] - f[c']$ ó $f(x) \in f[c'] - f[c]$, así que $g(c) = f[c] \neq f[c'] = g(c')$.

Y si $c \in P(B) \Rightarrow c \subseteq B$. Así $c = f[\{x \mid f(x) \in c\}] = g(\{x \mid f(x) \in c\})$.□

Observación. La afirmación inversa de d) es un indecidible; es decir, si suponemos que $P(A) \sim P(B)$ no se puede probar ni refutar que $A \sim B$. La prueba de esto queda fuera del alcance de este libro.

Ejemplos de no-equipotencia:

- $2 \not\sim 3$, Es decir $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \not\sim \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

- $\omega \not\sim \mathbb{R}$ (*Cantor* 1873)

Veamos que para toda $f : \omega \longrightarrow \mathbb{R}$, hay $r \in \mathbb{R}$ tal que $r \notin im(f)$, expresemos $f(n)$ para toda n, como una lista de valores en $\mathbb{R}$ en notación decimal; sea $f : \omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(0) = a_0.a_{00}a_{01}a_{02}a_{03}a_{04}....$
$f(1) = a_{1.}a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}....$
$f(2) = a_{2.}a_{20}a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}....$
$\vdots \quad \vdots$

Sea $r = b.b_0b_1b_2b_3b_4......$, donde $b = 0$ y

$$b_n = \begin{cases} 7 & Si\ a_{nn} \neq 7 \\ 5 & Si\ a_{nn} = 7 \end{cases}$$

Entonces $\forall n, r \neq f(n)$ en el lugar decimal n-ésimo (contando desde 0), por tanto $r \notin im(f)$. Así pues no hay biyección posible entre ω y $\mathbb{R}$.$\square$

TEOREMA DE CANTOR. Para todo conjunto A, $A \not\sim P(A)$.
Prueba: Sea $g : A \longrightarrow P(A)$ cualquiera.
Sea $B = \{y \in A \mid y \notin g(y)\}$, $B \in P(A)$.
Pero $B \notin im(g)$ pues si $B = g(z)$ para algún $z \in A$, tendríamos que:

$$z \in B \Leftrightarrow z \notin g(z) \Leftrightarrow z \notin B \quad \overset{\nabla}{\circ}$$

Así pues g no es suprayectiva y como fue arbitraria, no hay biyección posible entre A y $P(A)$.$\square$

Observación. Hay $f : A \longrightarrow P(A)$ inyectiva; por ejemplo tal que

$$\forall x \in A, f(x) = \{x\} \in P(A).$$

Obviamente, $x \neq y \Rightarrow f(x) = \{x\} \neq \{y\} = f(y)$.

Observación. $\neg\exists z \forall w[w\, R\, g(z) \Leftrightarrow \neg(w\, R\, g(w))]$ Es Universalmente Verdadera (U.V.) para toda g función y para toda R relación binaria.

Obsérvese que con la interpretación de conjuntos, R como $\in$ y g cualquier función, el enunciado U.V. afirma que no hay un conjunto tal que su imagen bajo g sea el conjunto de todos los conjuntos que no pertenecen a su propia imagen bajo g.

TEOREMA 14. $\mathbb{R}$ no es biyectable con ω.

Esta prueba es diferente a la anterior, y está basada en las siguientes propiedades de $\mathbb{R}$:

$(\mathbb{R}, <)$ es denso:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}[x < y \Rightarrow \exists\, z \in \mathbb{R}(x < z \ \wedge \ z < y)\,].$$

$(\mathbb{R}, <)$ es sin extremos:

$$\forall x \in \mathbb{R}[\exists\, y \in \mathbb{R}(x < y) \ \wedge \ \exists\, z \in \mathbb{R}(z < x)]$$

$(\mathbb{R}, <)$ es completo:
$\forall B \subseteq \mathbb{R}[B \neq \emptyset \wedge \exists\, y \in \mathbb{R}\, \forall x \in B\,(x \leq y) \Rightarrow$
$\exists\, w \in \mathbb{R}[\forall x \in B\,(x \leq w) \wedge \forall\, z \in \mathbb{R}(\,\forall x \in B(x \leq z) \Rightarrow$
$w \leq z)]]$,
($i.e.$ $w =$ Mínima Cota Superior de B).

Prueba: Supongamos que $\mathbb{R}$ fuera contable, digamos $\mathbb{R} = \{c_n \mid n \in \omega\}$. Encontraremos un real a tal que $a \neq c_n\ \forall n \in \omega$.

Definimos por recursión para ω :

i) Sean $a_0 = c_0,\ b_0 = c_k$ donde k es el mínimo índice natural tal que $a_0 < c_k$ ($\mathbb{R}$ sin extremo derecho).

ii) $a_{n+1} = c_k$, donde k es el mínimo índice natural tal que $a_n < c_k < b_n$ ($\mathbb{R}$ denso).

$b_{n+1} = c_k$, donde k es el mínimo índice natural tal que $a_{n+1} < c_k < b_n$ ($\mathbb{R}$ denso).

Observación. $\forall n \in \omega(\,a_n < a_{n+1}\ \wedge\ b_{n+1} < b_n)$.

Observación. $\{a_n \mid n \in \omega\}$ está acotado superiormente por todos los b_n's y *no* tiene último, por lo tanto $\forall n, m \in \omega\,(a_n \neq b_m)$, $\{b_n \mid n \in \omega\}$ acotan a todos los a_n's y no tiene mínimo.

Sea $a = Sup\{a_n \mid n \in \omega\}$, entonces $a \neq c_k\ \forall k \in \omega$ $\overset{\nabla}{\circ}$

$a \neq c_k\ \forall k \in \omega$ pues $\forall n \in \omega(\,a_n < a < b_n)$ y $\forall k \exists n(c_k \leq a_n \vee b_n \leq c_k)$, es imposible que $\forall n(a_n < c_k < b_n)$ pues tal c_k se seleccionará como a_{n+1} ó b_{n+1} a lo más en k pasos.$\square$

Meditación. Como $\mathbb{Q}$ es denso y sin extremos, la completud de $\mathbb{R}$ es la que determina su no numerabilidad.

EJERCICIO. Verificar que $\omega \times \omega \underset{F}{\sim} \omega$ donde
$$F(<m, n>) = \tfrac{1}{2}[(m+n)^2 + 3m + n]$$

3.2 FINITUD

DEFINICIÓN. Un conjunto A es finito $\Leftrightarrow$ A es equipotente a algún número natural.

DEFINICIÓN. Un conjunto A es infinito $\Leftrightarrow$ no es finito.

Así pues, A es infinito $\Leftrightarrow$ no es biyectable con ningún número natural.

Observación. Todo número natural es finito.

Si $A \sim n$, decimos que A tiene n elementos y lo denotamos con $|A| = n$, y decimos que el cardinal de A es n.

Observación. $\forall n \in \omega\,(|n| = n)$ y A finito $\wedge$ $A \sim B \Rightarrow B$ finito.

LEMA DE FINITUD. Para todo $n \in \omega$ y para todo $x \underset{\neq}{\subseteq} n$, $n \nsim x$.

(Es decir, ningún número natural es equipotente a un subconjunto propio suyo.)

Prueba: inducción sobre n

$n = 0$ se cumple por vacuidad ya que 0 *no* tiene subconjuntos *propios.*

H.I. Supongamos para n: $\forall w \underset{\neq}{\subseteq} n\,(n \nsim w)$

P.D. para $s(n) = n + 1$: $\forall z \underset{\neq}{\subseteq} n + 1\,(n + 1 \nsim z)$

Supongamos que hay $z \underset{\neq}{\subseteq} n + 1$ tal que $n + 1 \underset{f}{\sim} z$

Hay dos casos:

- Si $n \notin z$ entonces $z \subseteq n$ y $f\,|_n$biyecta n con

$$z - \{f(n)\} \underset{\neq}{\subseteq} z \subseteq n \text{ así } n \underset{f|_n}{\sim} z - \{f(n)\} \underset{\neq}{\subseteq} n \quad \overset{\nabla}{\circ}$$

contra la H.I.

- Si $n \in z$ entonces $n = f(k)$ para algún $k \in n + 1$. Definimos $g : n \longrightarrow z$ como:

$$\forall i \in n,\ g(i) = \begin{cases} f(i) & \forall i \neq k,\ i < n \\ f(n) & \text{Si } i = k \text{ y } k < n \end{cases}$$

Observación. Si $k = n$, entonces $g = f\,|_n$.

Entonces g es 1 a 1 de n sobre $z - \{n\} \underset{\neq}{\subseteq} n \overset{\nabla}{\circ}$ Contra la H.I.

Por lo tanto se cumple para toda n. □

COROLARIO. Ningún número natural es equipotente a un subconjunto propio suyo.

COROLARIO (Principio del Palomar). Si n objetos son colocados en *menos* de n lugares, algún lugar tendrá más de un objeto.

COROLARIO

a) Si $n \neq m$ entonces $n \nsim m$.

b) Si $| A | = n$ y $| A | = m$ entonces $n = m$.

Observación. Esto justifica la definición formal de cardinal de A para todo A finito, que cumple $A \sim | A |$ y $| A | = | B | \Leftrightarrow A \sim B$.

COROLARIO. ω es infinito.

Prueba: Supongamos que $\exists\, k \in \omega\ \exists\, f$ tal que $\omega \underset{f}{\sim} k$. Entonces $f\,|_k$ biyecta k con un subconjunto propio. $\overset{\nabla}{\circ}$

COROLARIO. Ningún conjunto finito es equipotente a un subconjunto propio. Es decir, si A es finito y $Z \underset{\neq}{\subseteq} A$ entonces $Z \nsim A$.

Prueba: Supongamos que A es finito y sea n tal que $A \underset{g}{\sim} n$.

Supongamos que hay una biyección f de A sobre un subconjunto propio, consideremos la composición $g \circ f \circ g^{-1} : n \longrightarrow n$; es inyectiva y es sobre un subconjunto propio de n $\overset{\nabla}{\circ}$ (Pues si $a \in A - im(f)$ $(im(f) \underset{\neq}{\subseteq} A)$, entonces $g(a) \in n - im(g \circ f \circ g^{-1})$, por lo tanto

$$im(g \circ f \circ g^{-1}) \underset{\neq}{\subseteq} n).\ n \underset{g\circ f\circ g^{-1}}{\sim} im(g \circ f \circ g^{-1}) \underset{\neq}{\subseteq} n \overset{\nabla}{\circ} \text{ (Lema).}\square$$

DEFINICIÓN. Se dice que un conjunto A es *Dedekind Infinito*, si es biyectable con un subconjunto propio.

COROLARIO. Si un conjunto es Dedekind Infinito, entonces es Infinito. Veremos más adelante que el inverso es cierto con el Axioma de Elección.

COROLARIO. ω es infinito.

2ª Prueba: Sea $s : \omega \longrightarrow \omega - \{0\} \subsetneq \omega$, la función sucesor, así s es biyección por lo tanto ω es infinito.

3.2.1 OTRAS PROPIEDADES DE FINITOS

Usaremos $fin(x)$ para abreviar "x es finito".

1) Si $x \sim n+1$ y $b \in x \Rightarrow x - \{b\} \sim n$.
Sea $x \underset{g}{\sim} n+1$. Definimos $g' : x - \{b\} \longrightarrow n$ tal que:

$$g'(y) = \begin{cases} g(y) & Si\ g(y) \neq n \\ g(b) & Si\ g(y) = n \end{cases}$$

Entonces $x - \{b\} \underset{g'}{\sim} n$.

2) Para cualquier y, $fin(x) \Rightarrow fin(x \cup \{y\})$
- Si $y \in x$,entonces $x \cup \{y\} = x$,por lo tanto $fin(x \cup \{y\})$.
- Si $y \notin x$ y dado $n \underset{f}{\sim} x$, definimos $g : n+1 \longrightarrow x \cup \{y\}$ tal que:

$$g(i) = \begin{cases} f(i) & Si\ i < n \\ y & Si\ i = n \end{cases}$$

Así, $n+1 \underset{g}{\sim} x \cup \{y\}$, y $fin(x \cup \{y\})$.

3) $n \in \omega \ \wedge z \subsetneq n \Rightarrow fin(z)$
Sea $T = \{n \in \omega \mid \forall z \subsetneq n, fin(z)\}$, veamos que T es inductivo:
- $0 \in T$ por vacuidad.

- Supongamos que $n \in T$, sea $z \subsetneq n+1$. Hay 2 casos:
   - $z \subseteq n \underset{H.I.}{\Rightarrow} fin(z)$.
   - Si $n \in z$. Sea $w = z - \{n\} \subseteq n \underset{H.I.}{\Rightarrow} fin(w)$, y

   $z = w \cup \{n\}$, entonces por (2), $fin(z)$.

Así pues, T es inductivo.

4) $fin(x) \wedge z \subseteq x \Rightarrow fin(z)$. i.e. Subconjuntos de finitos son finitos.

Sea $x \underset{f}{\sim} n$ y $z \subseteq x$. Entonces $f[z] \subseteq n$ y por (3), $fin(f[z])$, pero $z \underset{f|_z}{\sim} f[z]$, así $fin(z)$.

5) $fin(x) \wedge fin(y) \Rightarrow fin(x \cup y)$.

Supongamos $fin(x)$. Sea $T = \{n \in \omega \mid \forall y(y \sim n \rightarrow fin(x \cup y)\}$

Veamos que T es inductivo:

- $0 \in T$, pues $y \sim 0 \Rightarrow y = \emptyset$, por lo tanto $x \cup y = x \cup \emptyset = x$ que es finito.
- Supongamos que $n \in T$. Sean, $y \underset{f}{\sim} n+1$, $z = f^{-1}(n) \in y$ así:

  $y - \{z\} \sim n$ (por 1), y por H.I. $x \cup (y - \{z\})$ es finito.

Entonces $x \cup y = x \cup (y - \{z\}) \cup \{z\}$ es finito por (2).

6) $fin(x)$ y $\forall y \in x,\ fin(y) \Rightarrow fin(\cup x)$ i.e. Union finita de finitos es finito.

Sea $T = \{n \in w \mid [n \sim x \wedge \forall y \in x,\ fin(y)] \Rightarrow fin(\cup x)\}$, veamos que T es inductivo:

- $0 \in T$, pues $0 \sim x \Rightarrow x = \emptyset$ y $\cup \emptyset = \emptyset$ y $fin(\emptyset)$.
- Supongamos que $n \in T$. *Sea* $x \underset{f}{\sim} n+1$.

  $z = f^{-1}(n) \in x \underset{(3)}{\Rightarrow} x - \{z\} \sim n$, por H.I. $\cup(x - \{z\})$ es finito

  y como $z \in x$, $fin(z) \underset{(5)}{\Rightarrow} (\cup(x - \{z\})) \cup z = \cup x$ es finito.

7) $fin(A) \wedge fin(B) \Rightarrow fin(A \times B)$.
Sea $h : A \times \{z\} \longrightarrow A$ tal que $h(<x, z>) = x$. Claramente $A \times \{z\} \underset{h}{\sim} A$.
Así, $fin(A) \Rightarrow fin(A \times \{z\})\ \forall z$.
Ahora $A \times B = \cup\{A \times \{z\} \mid z \in B\} = \bigcup_{z \in B} A \times \{z\} \underset{(6)}{\Rightarrow} A \times B$ es finito.

8) $fin(x) \wedge n \in \omega \Rightarrow fin({}^{n}x)$
Supongamos $fin(x)$, Sea $T = \{n \in \omega \mid fin({}^{n}x)\}$.
- $0 \in T$, pues ${}^{0}x = \{\emptyset\}$, que es finito.
- Supongamos que $n \in T$, veamos que $fin({}^{n+1}x)$.
$\forall g \in {}^{n}x, \forall z \in x$, sea $g_z = g \cup \{<n, z>\}$, así $g_z \in {}^{n+1}x$.
$\forall g \in {}^{n}x$, sea $\overline{g} = \{g_z \mid z \in x\}$. Como $\overline{g} \sim x$, $\overline{g}$ es finito.
Ahora ${}^{n+1}x = \cup\{\overline{g} \mid g \in {}^{n}x\}$. Pero ${}^{n}x$ es finito por H.I., y $\forall g \in {}^{n}x$ ($\overline{g}$ es finito)
$\underset{(6)}{\Rightarrow}$ ${}^{n+1}x$ es finito.

9) $fin(A) \Rightarrow fin(P(A))$. i.e. Potencia de finitos es finito.
Ya se mostro que $P(A) \sim {}^{A}2$.
Como $fin(A)$, sea $A \underset{f}{\sim} n$. Sea $H : {}^{A}2 \longrightarrow {}^{n}2$ tal que $H(g) = g \circ f^{-1}$
- $g \neq g' \Rightarrow H(g) = g \circ f^{-1} \neq g' \circ f^{-1} = H(g')$.
- $h \in {}^{n}2 \Rightarrow h \circ f \in {}^{A}2$ y $H(h \circ f) = h \circ f \circ f^{-1} = h$, así ${}^{A}2 \underset{H}{\sim} {}^{n}2 \underset{(8)}{\Rightarrow} fin({}^{n}2)$, por lo tanto $fin({}^{A}2)$, por lo tanto $fin(P(A))$.

10) $fin(A) \wedge fin(B) \Rightarrow fin({}^{A}B)$.
${}^{A}B \subseteq P(A \times B)$; pero $fin(A \times B)$ por (7), $fin(P(A \times B))$ por (9) y $fin({}^{A}B)$ por (4).

11) $fin(x)$ y f función $\Rightarrow fin(f[x])$. i.e. Imagen bajo función de

finitos, es finito.

$$f[x] = \{f(y) \mid y \in x\} = \cup\{\ \{f(y)\}\ \mid y \in x\} \underset{(6)}{\Rightarrow} fin(f[x]).$$

Meditación. Toda construcción posible, sin axioma de infinito, aplicada a conjuntos finitos genera conjuntos finitos. El Axioma de Infinito es necesario.

DEFINICIÓN. A es numerable $\Leftrightarrow A \sim \omega$.
A es contable $\Leftrightarrow fin(A) \vee A \sim \omega$.

3.2.2. DEFINICIONES ALTERNATIVAS DE FINITUD

1) A es finito $\Leftrightarrow \exists\, n \in \omega\,(A \sim n)$. Esta es nuestra definición. Tenemos como alternativas las siguientes definiciones:

2) A es r-finito $\Leftrightarrow \exists\, r \subseteq A$ x A, relación tal que:
$i)$ $< A, r >$ $COTO$
$ii)$ $\forall B \subseteq A, B \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, a\, \exists\, b(a = \underset{r}{\text{mín}} B\ \wedge\ b = \underset{r}{\text{máx}} B)$.

3) A es Tarski-finito ó simplemente T-finito $\Leftrightarrow$

$$\forall\, X \subseteq P(A), X \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, y \in X\, (\forall\, w \in X(w \neq y \Rightarrow y \not\subseteq w))$$

($i.e.$ y es $\subseteq$-maximal en X)
i.e. "Toda colección no vacía de subconjuntos de A tiene un elemento tal que no está contenido propiamente en ningún otro elemento de la colección."

4) A es Dedekind-finito ó simplemente D-finito $\Leftrightarrow \forall\, B \underset{\neq}{\subseteq} A$ $(B \nsim A)$. i.e A no es biyectable con ninguno de sus subconjuntos propios.

5) A es D'-finito $\Leftrightarrow \forall B \underset{\neq}{\subseteq} A\,(B \nsim \omega)$. *i.e.* A no tiene un subconjunto numerable.

Ejemplos de conjuntos infinitos: $\omega, Z, Q, \mathbb{R}, P(\omega), P(\mathbb{R})$.

Observación. Un conjunto A es Dedekind-Infinito sii A es biyectable con algún subconjunto propio. Un conjunto A es D-finito sii no es D-Infinito.

Ejemplos de Conjuntos D-Infinitos: $\omega, Z, Q, \mathbb{R}$.

TEOREMA 15. A es Dedekind-Infinito $\Rightarrow$ A es Infinito.

Prueba: Ya se probó la contrapuesta: A es finito $\Rightarrow$ A es D-finito, en los corolarios del Lema de Finitud.□

La implicación inversa, se prueba con Axioma de Elección (AE) y la veremos después. Sin Axioma de Elección, no se puede demostrar.

DEFINICIÓN. Para cualesquiera A, B conjuntos:

i) $|A| = |B| \Leftrightarrow A \sim B$

ii) $fin(A) \Rightarrow |A| = n$, donde $n \in \omega$ es el único n tal que $A \sim n$.

Observaciones

- $\forall n \in \omega$ y $\forall A$ finito $|A| \sim A$ y $|n| = n$. $|\omega| = |Z| = |Q|$.

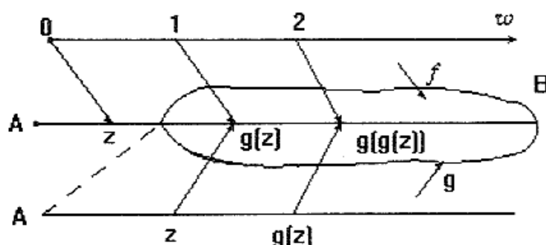
  NOTACIÓN. $|\omega| = \aleph_0$
- $|P(\omega)| = |\mathbb{R}| = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}^n|$.

  NOTACIÓN. $|\mathbb{R}| = \mathbf{c}$
- $|A| \neq |P(A)|$, en particular $|\omega| \neq |\mathbb{R}|$ por el Teorema de Cantor.

TEOREMA 16. A es Dedekind-infinito $\Leftrightarrow$ A tiene un subconjunto numerable.

Prueba: $\Rightarrow$) Supongo $A \underset{g}{\sim} B \underset{\neq}{\subseteq} A$. Sea z $\in A - B \neq \emptyset$, así z $\notin g[A] = B$, y g es inyectiva. Por recursión para ω, defino $f : \omega \longrightarrow A$ tal que:

$$f(0) = z$$
$$f(s(n)) = g(f(n))$$



Claramente $f[\omega] \subseteq A$ y como g es inyectiva y $z \notin g[A]$, por un resultado general anterior, f es inyectiva. Así pues $\omega \underset{f}{\sim} f[\omega] \subseteq A$ y $f[\omega]$ es un subconjunto numerable de A.

$\Leftarrow$) Sea $C \subseteq A$, tal que $\omega \underset{f}{\sim} C \subseteq A$.
Definimos $g : A \longrightarrow A$ tal que :

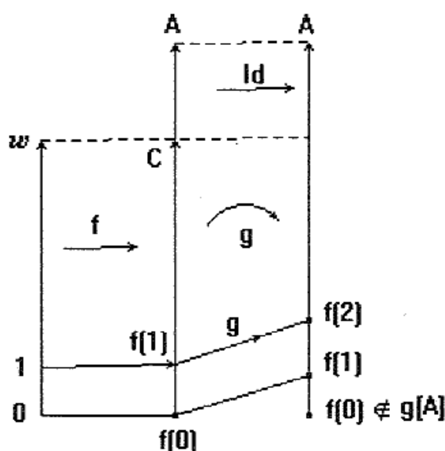
$$g(x) = \begin{cases} f(n+1) & Si\ x = f(n) \in C \\ x & Si\ x \in A - C \end{cases}$$

g es inyectiva pues si $x \neq y \in A$ entonces:

i) $x \in A - C,\ y \in A - C \Rightarrow g(x) = x \neq y = g(y)$.

ii) $x = f(n) \in C,\ y \in A - C \Rightarrow g(x) = f(n+1) \in C$ y $g(y) = y \notin C$, así $g(x) \neq g(y)$

iii) $x = f(n),\ y = f(m) \Rightarrow n \neq m$, pues f es función. Entonces



$n + 1 \neq m + 1$ (sucesor es inyectiva) y así

$g(x) = f(n+1) \neq f(m+1) = g(y)$ pues f es inyectiva.

Entonces $A \underset{g}{\sim} g[A] \underset{\neq}{\subseteq} A$ pues $f(0) \in A$ y $f(0) \notin g[A]$. □

EJERCICIOS

1) Si r es un orden total en un conjunto finito A, entonces r es un buen orden en A; es decir, si $< A, r >$ $COTO$ y A finito entonces $< A, r >$ $COBO$.

2) Si $r \subseteq A \times A$, r antirreflexiva, transitiva y que cumple la propiedad $\forall x \in A \, \exists y \in A \, (x \neq y$ y $< x, y > \in r)$, entonces A es infinito.

3) Si $r \subseteq A \times A$, r es reflexiva, transitiva y cumple tricotomía entonces:

   a) Si A es finito, hay un $b \in A$ tal que $\forall x \in A$, $< b, x > \in r$. (Pongamos como ejemplo de r, la relación "conocer a" sobre un conjunto (finito) de personas; entonces,

si se cumplen las hipótesis, ahí hay alguien que conoce a todos). Se sugiere inducción matemática sobre el número de elementos de A.

b) Dar un ejemplo infinito de A donde se cumpla lo anterior y otro ejemplo infinito de A donde no se cumpla que hay un $b \in A$ tal que $\forall x \in A$, $< b, x > \in r$.

4) Probar las siguientes equivalencias entre las definiciones alternativas de finitud:

a) Def 1) $\Leftrightarrow$ Def 2) $\Leftrightarrow$ Def 3)

b) Def 4) $\Leftrightarrow$ Def 5)

c) Def 1) $\Rightarrow$ Def 4), Def 1) $\Rightarrow$ Def 5). (Los inversos requieren del Axioma de Elección).

3.3 DOMINANCIA

DEFINICIÓN. Un conjunto A está dominado por un conjunto $B \Leftrightarrow$ hay una función inyectiva de A en B.

NOTACIÓN. Si A está dominado por B se denota: $A \preceq B$, y si f es la funcion inyectiva de A en B, se denota: $A \underset{f}{\preceq} B$.

Observaciones

a) Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) $A \preceq B$

ii) $\exists C \subseteq B$ tal que $A \sim C$.

i) $\Rightarrow$ ii) Si $A \underset{f}{\preceq} B$, sea $C = f[A] \subseteq B$.

ii) $\Rightarrow$ i) Si $A \underset{g}{\sim} C \subseteq B$, $A \underset{g}{\preceq} B$.

b) $A \sim B \Rightarrow A \preceq B$ y $B \preceq A$. (Si $A \underset{f}{\sim} B \Rightarrow A \underset{f}{\preceq} B$ y $B \underset{f^{-1}}{\preceq} A$).

c) $A \preceq A$; con Id_A.

d) $A \preceq B$ y $B \preceq C \Rightarrow A \preceq C$. (Si $A \underset{f}{\preceq} B$ y

$B \underset{g}{\preceq} C \Rightarrow A \underset{g \circ f}{\preceq} C$).

e) $A \preceq P(A)$; *con* $f(x) = \{x\} \in P(A)$, $\forall\, x \in A$.

f) $A \subseteq B \Rightarrow A \preceq B$; *con* Id_A

g) $A \preceq B \Rightarrow P(A) \preceq P(B)$
Si $A \underset{f}{\preceq} B$. Sea $g : P(A) \longrightarrow P(B)$ tal que $\forall c \subseteq A, g(c) = f[c]$,
así $P(A) \underset{g}{\preceq} P(B)$

h) $A \preceq B$, $A \sim C$ y $B \sim D \Rightarrow C \preceq D$.
Si $C \underset{f}{\sim} A \underset{g}{\preceq} B \underset{h}{\sim} D \Rightarrow C \underset{h \circ g \circ f}{\preceq} D$

DEFINICIÓN. Para cualesquiera A, B conjuntos:
i) $\mid A \mid \leq \mid B \mid \Leftrightarrow A \preceq B$.
ii) $\mid A \mid < \mid B \mid \Leftrightarrow A \preceq B$ y $A \nsim B$.

NOTACIÓN. Si $A \preceq B$ y $A \nsim B$ lo denotamos $A \prec B$ y decimos que A está estrictamente dominado por B.

PROPOSICIÓN. $\forall A, A \prec P(A)$, es decir $\mid A \mid < \mid P(A) \mid$.
Prueba: Por observación e) y Teorema de Cantor.

COROLARIO. Para todo conjunto existe otro conjunto de cardinal estrictamente mayor.

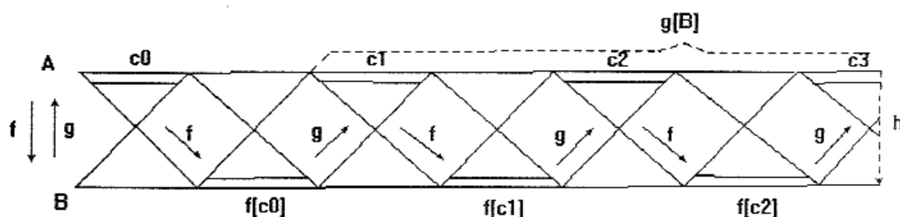
TEOREMA(Cantor-Schröder-Bernstein)

$$A \preceq B \text{ y } B \preceq A \Rightarrow A \sim B.$$

Prueba: Sean $f : A \underset{1-1}{\longrightarrow} B$, $g : B \underset{1-1}{\longrightarrow} A$
Si $g[B] = A$, g es la biyección; si no $g[B] \subsetneq A$.

Definimos por recursión para ω :

$c_0 = A - g[B]$
$c_{n+1} = g \circ f[c_n]$



Observación. $A - g[B] \in P(A)$. Sea $J : P(A) \longrightarrow P(A)$ tal que

$$\forall D \subseteq A, J(D) = g[f[D]] = g \circ f[D]$$

Definimos $h : A \longrightarrow B$ como $h(x) = \begin{cases} f(x) & Si\ x \in \bigcup\limits_{n \in \omega} C_n \\ g^{-1}(x) & Si\ x \notin \bigcup\limits_{n \in \omega} C_n \end{cases}$

entonces h es la función buscada.

i) h es función pues f es función y $x \notin \bigcup\limits_{n \in \omega} C_n \Rightarrow x \notin c_0 = A - g[B] \Rightarrow$ $x \in g[B]$, por lo tanto $x \in dom(g^{-1})$ y g^{-1} es función.

ii) h es inyectiva: Sean $x \neq x' \in A$

Si $x, x' \in \bigcup C_n$ o $x, x' \notin \bigcup C_n$ entonces $h(x) \neq h(x')$ pues f y g^{-1} son inyectivas

Si $x \in C_n$ para algún $n \in \omega$ y $x' \notin \bigcup C_n$ entonces $h(x) = f(x) \in f[C_n]$ y $h(x') = g^{-1}(x') \notin f[C_n]$ pues si $g^{-1}(x') \in f[C_n]$ entonces $x' = gg^{-1}(x') \in g[f[C_n]] = C_{n+1}$ $\overset{\nabla}{\circ}$ por lo tanto $h(x) \neq h(x')$.

iii) h es suprayectiva: Sea $y \in B$. $y \in \bigcup f[C_n] \Rightarrow y = f(x_0)$ para algún $x_0 \in C_n$, por lo tanto $h(x_0) = f(x_0) = y$.
$y \in B - \bigcup\limits_{n \in \omega} f[C_n] \;\Rightarrow\; g(y) \notin \bigcup C_n$ (pues $g(y) \notin C_0$ y $g(y) \neq g(x)$

$\forall\, x \in \bigcup_{n\in\omega} f[C_n]$, pues $y \notin \bigcup_{n\in\omega} f[C_n]$ y g es inyectiva, por lo tanto $g(y) \notin g[f[C_n]] = C_{n+1}$) así, por la definición de h, $h(g(y)) = g^{-1}(g(y)) = y$.$\square$

COROLARIO

a) $A \preceq B \preceq C$ y $A \sim C \Rightarrow A \sim B \sim C$.

b) $A \subseteq B \subseteq C$ y $A \sim C \Rightarrow A \sim B \sim C$.

c) $A \preceq B \preceq C \preceq A \;\Rightarrow A \sim B \sim C$.

d) $[0,1] \sim \mathbb{R}$ y $(0,1) \sim [0,1]$.

Prueba: a) Sup. $A \preceq B \preceq C$, por lo tanto $A \preceq B$ y $B \preceq C$, y como $A \sim C, A \preceq C$ y $C \preceq A$ entonces $B \preceq C \preceq A$ y $C \preceq A \preceq B$, $B \preceq A$ y $C \preceq B \underset{C-B}{\Rightarrow} A \sim B$ y $B \sim C$.

b) Es un caso particular de a), ya que $A \subseteq B \Rightarrow A \preceq B$

c) Ejercicio.

d) Como $(0,1) \subseteq [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ y $(0,1) \sim \mathbb{R}$, por lo tanto $[0,1] \sim \mathbb{R}$ y además $(0,1) \sim [0,1]$.

COROLARIO

$\forall A, B\,(\mid A \mid \leq \mid B \mid$ y $\mid B \mid \leq \mid A \mid \Rightarrow \mid A \mid = \mid B \mid)$.

COROLARIO. La relación $\leq$ entre cardinales de conjuntos es un orden. Es decir, es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

PREGUNTA: ¿$\forall A, B,\ \mid A \mid \leq \mid B \mid$ o $\mid B \mid \leq \mid A \mid$?, es decir

¿$\forall A, B,\ A \preceq B$ o $B \preceq A$?, es decir

¿La relación de dominancia entre conjuntos es total?

RESPUESTA: Se verá mas adelante con Axioma de Elección.

Aplicaciones del teorema de Cantor-Schröder-Bernstein

1) No existe A tal que $P(A) \in P(A)$.

Supongamos que sí, sea A tal que $P(A) \in P(A)$, por lo tanto $P(A) \subseteq A$, por lo tanto $P(A) \preceq A$ y claramente $A \preceq P(A)$, entonces por el Teorema de Cantor-Bernstein, tenemos que $A \sim P(A)$ $\overset{\bigtriangledown}{\circ}$ (Contradice el Teorema de Cantor).

2) Probar que $\omega \times \omega \sim \omega$

Damos $g : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$, $g(n,m) = 5^n \cdot 7^m$, por Teorema Fundamental de la Aritmetica g es $1-1$, por lo tanto $\omega \times \omega \underset{g}{\preceq} \omega$, y además $\omega \underset{f}{\preceq} \omega \times \omega$ donde $f(n) = < n, n >$, claramente inyectiva. Por lo tanto por Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein tenemos que $\omega \times \omega \sim \omega$.

3.4 Aritmética cardinal

Definición. Para cualesquiera A, B conjuntos definimos las operaciones:

$$| A | + | B | = | A \times \{0\} \cup B \times \{1\} |$$
$$| A | \cdot | B | = | A \times B |$$
$$| A |^{|B|} = | \ {}^{B}A \ | \text{, donde } {}^{B}A = \{ f \mid f : B \longrightarrow A\}$$

Notación. Denotamos con κ, λ, μ a los cardinales; donde, κ es cardinal significa que hay un conjunto A tal que $\kappa = | A |$.

Con esta notación, si κ, λ, μ son cardinales tales que $\kappa = | K |$ $\lambda = | L |$, $\mu = | M |$ entonces definimos:

$$\kappa + \lambda = | K \times \{0\} \cup L \times \{1\} |$$
$$\kappa \cdot \lambda = | K \times L |$$
$$\kappa^{\lambda} = | \ {}^{L}K \ |$$

PROPOSICIÓN. Las operaciones están bien definidas, es decir:
Si $A \sim A'$ y $B \sim B'$ entonces

i) $A \times \{0\} \cup B \times \{1\} \sim A' \times \{0\} \cup B' \times \{1\}$
ii) $A \times B \sim A' \times B'$
iii) ${}^{B}A \sim {}^{B'}A'$

Prueba: ya se hizo: Proposición 4.

Sean κ, λ, μ cardinales y K, L, M conjuntos tales que $\kappa = \mid K \mid$, $\lambda = \mid L \mid$, $\mu = \mid M \mid$. Podemos suponer K, L, M ajenos o ajenizarlos con el producto cartesiano con $\{0\}$ y con $\{1\}$.

TEOREMA 17. Propiedades de la Suma:

i) $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$
ii) $\kappa + (\lambda + \mu) = (\kappa + \lambda) + \mu$
iii) $\kappa + 0 = \kappa$
iv) $\kappa \leq \lambda \Rightarrow \kappa + \mu \leq \lambda + \mu$
v) $\kappa < \lambda \Rightarrow \kappa + \mu \leq \lambda + \mu$
vi) $\kappa \leq \kappa + \lambda$
vii) $\aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0$
viii) $c = c + c$

Prueba:

i) $K \times \{0\} \cup L \times \{1\} \underset{g}{\sim} L \times \{0\} \cup K \times \{1\}$ tal que

$$g(x,b) = \begin{cases} < x, 1 > & \text{Si } b = 0 \\ < x, 0 > & \text{Si } b = 1 \end{cases}$$

ii) $K \times \{0\} \cup [(L \times \{0\} \cup M \times \{1\}) \times \{1\}] \underset{g}{\sim}$
$[(K \times \{0\} \cup L \times \{1\}) \times \{0\}] \cup M \times \{1\}$

con g definida, dados, $k \in K$, $l \in L$, $m \in M$, así:

$$< k, 0 > \overset{g}{\longmapsto} << k, 0 >, 0 >$$
$$<< l, 0 >, 1 > \overset{g}{\longmapsto} << l, 1 >, 0 >$$
$$<< m, 1 >, 1 > \overset{g}{\longmapsto} < m, 1 >$$

iii) $K \times \{0\} \cup \emptyset = K \times \{0\} \sim K$

iv) Sea $K \underset{f}{\preceq} L$, de aquí tenemos que

$$K \times \{0\} \cup M \times \{1\} \underset{g}{\preceq} L \times \{0\} \cup M \times \{1\}$$

donde g esta definida de la siguiente manera:

$$g(x,b) = \begin{cases} < f(x), 0 > & \text{Si } b = 0 \\ < x, 1 > & \text{Si } b = 1 \end{cases}$$

v) Análogo a iv). Ejemplo: $\aleph_0 < c$ y $\aleph_0 + c = c + c$. Justificado así:
$\omega \prec \mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \{1\} \subseteq \underbrace{\omega \times \{0\} \cup \mathbb{R} \times \{1\}}_{\aleph_0 + c} \subseteq$$

$$\underbrace{\mathbb{R} \times \{0\} \cup \mathbb{R} \times \{1\}}_{c + c} = \mathbb{R} \times \{0,1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}$$

Por lo tanto todos son biyectables.

vi) $K \underset{h}{\preceq} K \times \{0\} \cup L \times \{1\}$, donde $h(x) = < x, 0 >$

vii) $\omega \underset{g}{\sim} \omega \times \{0\} \cup \omega \times \{1\}$, donde

$$g(n) = \begin{cases} < \frac{n}{2}, 0 > & \text{Si } n \text{ es par} \\ < \frac{n-1}{2}, 1 > & \text{Si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

viii) $\mathbb{R} \preceq \mathbb{R} \times \{0\} \cup \mathbb{R} \times \{1\} = \mathbb{R} \times \{0,1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}$
$\therefore \mathbb{R} \sim (\mathbb{R} \times \{0\} \cup \mathbb{R} \times \{1\})$.

PROPOSICIÓN. Dados A, B cualesquiera, si A', B' son tales que $A \sim A'$, $B \sim B'$ y $A' \cap B' = \emptyset$ entonces:

$$A \times \{0\} \cup B \times \{1\} \sim A' \cup B' \text{ y } |A| + |B| = |A' \cup B'|$$

Prueba: Sean $A \underset{f}{\sim} A', B \underset{g}{\sim} B'$.
Sea $h : A \times \{0\} \cup B \times \{1\} \longrightarrow A' \cup B'$ tal que

$$h(< x, b >) = \begin{cases} f(x) & \text{Si } b = 0 \\ g(x) & \text{Si } b = 1 \end{cases}$$

Afirmación: h es biyección
- h es inyectiva:

$$< x, b > \neq < x', b' > \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b \neq b' \Rightarrow \begin{cases} f(x) = h(x,b) \in A' \\ g(x) = h(x',b') \in B' \\ (o\ al\ rev\acute{e}s) \end{cases} \\ x \neq x' \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } b = b' & h(x,b) \neq h(x',b') \\ \text{Si } b \neq b' & h(x,b) \in A', h(x',b') \in B' \end{cases} \end{cases}$$

(∗) Como $A' \cap B' = \emptyset$, entonces $f(x) \neq g(x)$.
(∗∗) $h(x,b) \neq h(x',b')$, porque f es $1-1$, g es $1-1$ o porque $A' \cap B' = \emptyset$.
- h es suprayectiva:

$$y \in A' \cup B' \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = f(x) \text{ para algún } x \in A & \text{así que } h(x,0) = f(x) = y \\ o & \\ y = g(x) \text{ para algún } x \in B & \text{así que } h(x,1) = g(x) = y \end{cases}$$

COROLARIO. Dados κ, λ, y A, B tales que $\kappa = |A|, \lambda = |B|$, podemos suponer sin perdida de generalidad que $A \cap B = \emptyset$.

TEOREMA 18. Propiedades del Producto. Sean κ, λ, μ cardinales.
i) $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$
ii) $\kappa \cdot (\lambda \cdot \mu) = (\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu$
iii) $\kappa \cdot 1 = \kappa,\ \kappa \cdot 0 = 0,\ \lambda + \lambda = 2\lambda,\ \lambda + \lambda + \lambda = 3\lambda$
iv) $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$ (en particular, $\kappa \cdot (\lambda + 1) = \kappa \cdot \lambda + \kappa$)
v) $\kappa \geq 2, \lambda \geq 2 \Rightarrow \kappa + \lambda \leq \kappa \cdot \lambda$
vi) $\kappa \leq \lambda \Rightarrow \kappa \cdot \mu \leq \lambda \cdot \mu$
vii) $\kappa < \lambda \Rightarrow \kappa \cdot \mu \leq \lambda \cdot \mu$
viii) $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0,\ c \cdot c = c$

ix) $\lambda \neq 0 \Rightarrow \kappa \leq \kappa \cdot \lambda$

Prueba:

i) $K \times L \underset{f}{\sim} L \times K$ con $f(< x, y >) = < y, x >$

ii) $K \times (L \times M) \underset{f}{\sim} (K \times L) \times M$ con

$$f(< x, < y, z >>) =<< x, y >, z >$$

iii) $K \times \{0\} \underset{f}{\sim} K$ con $f(x, 0) = x$; $K \times \emptyset = \emptyset$

iv) $K \times (L \times \{0\} \cup M \times \{1\}) \underset{f}{\sim} (K \times L) \times \{0\} \cup (K \times M) \times \{1\}$ con

$$f(< x, < y, b >>) =<< x, y >, b >$$

Observación. $K \times (L \cup M) = (K \times L) \cup (K \times M)$.

v) Suponemos s.p.g $K \cap L = \emptyset$, sean $a_0, a_1 \in K$, $b_0, b_1 \in L$, entonces tenemos que $K \cup L \underset{h}{\preceq} K \times L$ con

$$h(x) = \begin{cases} < x, b_0 > & \text{Si } x \in K \\ < a_0, x > & \text{Si } x \in L - \{b_0\} \\ < a_1, b_1 > & \text{Si } x = b_0 \end{cases}$$

vi) Sea $K \underset{f}{\preceq} L$, entonces $K \times M \underset{g}{\preceq} L \times M$ con

$$g(< x, y >) = < f(x), y >$$

vii) Análogo a vi).

Ejemplo: $\aleph_0 < c$ y $\aleph_0 \cdot c = c \cdot c$ con $\omega \prec \mathbb{R}$ y $\omega \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pues

$$\mathbb{R} \sim \{0\} \times \mathbb{R} \subseteq \omega \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}$$

y por el teorema de Cantor-Bernstein todos son biyectables.

viii) $\omega \times \omega \sim \omega$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}$ ya se probó.

ix) Sea $L \neq \emptyset$ y $l \in L$. Entonces $K \underset{h}{\preceq} K \times L$ donde $h(x) =< x, l >$ □

TEOREMA 19. Propiedades de la Exponenciación.

i) $\forall \kappa,\ \kappa^0 = 1,\ \kappa^1 = \kappa,\ 1^\kappa = 1;\ \forall \kappa \neq 0, 0^\kappa = 0.$

ii) $\kappa \cdot \kappa = \kappa^2,\ c = 2^{\aleph_0}$

iii) $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$

iv) $\kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu = \kappa^{\lambda+\mu}$ (En particular $\kappa^{\lambda+1} = \kappa^\lambda \cdot \kappa$)

v) $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$

vi) $\mu \leq \lambda \Rightarrow \kappa^\mu \leq \kappa^\lambda$
(si no ambos κ y μ son cero, pues $0^0 = 1,\ 0^1 = 0$)

vii) $\mu \leq \lambda \Rightarrow \mu^\kappa \leq \lambda^k$

viii) $\kappa < 2^\kappa$ (Reformulación del Teorema de Cantor)

Prueba:

i) ${}^{\emptyset}K = \{\ f \mid f : \emptyset \longrightarrow K\} = \{\emptyset\} = \{0\} = 1$. En particular $0^0 = 1$.
${}^{1}K = \{\ f \mid f : 1 \longrightarrow K\} \underset{g}{\sim} K$ con $g(f) = f(0) \in K$;

$$f \neq h \Leftrightarrow f(0) \neq h(0)$$

${}^{K}1 = \{\ f \mid f : K \longrightarrow 1\} = \{\{ < x, 0 > \mid x \in K\}\} \sim 1$ (es el unitario de la función constante 0)
Sea $k \neq 0$, ${}^{K}0 = \{\ f \mid f : K \longrightarrow \emptyset\} = \emptyset = 0$.

ii) $K \times K \underset{g}{\sim} {}^{2}K$ con $g(< x, y >) : 2 \longrightarrow K$ tal que $g(< x, y >)(0) = x$ y $g(< x, y >)(1) = y$. $\mathbb{R} \sim {}^{\omega}2$ pues $\mathbb{R} \sim$ (0,1) $\underset{g}{\sim} {}^{\omega}2$ donde $g(r) = < a_i >_{i\in\omega}$, $a_i \in \{0, 1\}$ y $r = 0.a_0a_1a_2a_3....$ expansión binaria.

iii) ${}^{M}(K \times L) \underset{G}{\sim} {}^{M}K \times {}^{M}L$ con

$$G(f) = < \pi_K \circ f,\ \pi_L \circ f >,\ \forall\, f \in^M (K \times L)$$

donde π_K, π_L son las proyecciones izquierda y derecha respectivamente de $K \times L$, es decir $\pi_K : K \times L \longrightarrow K$, $\pi_K(< x, y >) = x$, $\pi_L : K \times L \longrightarrow L$, $\pi_L(< x, y >) = y$.

iv) Supongamos s.p.g. $L \cap M = \emptyset$, $({}^{L}K \times {}^{M}K) \underset{H}{\sim} {}^{L\cup M}K$ con

$$H(<f,g>) = f \cup g$$

obsérvese que f y g son compatibles pues $dom(f) = L$ y $dom(g) = M$, por lo tanto $dom(f) \cap dom(g) = \emptyset$ y así $f \cup g : L \cup M \longrightarrow K$.

v) ${}^{M}({}^{L}K) \underset{H}{\sim} {}^{(L\times M)}K$ donde

$$\forall f \in {}^{M}({}^{L}K),\ H(f) : L \times M \longrightarrow K$$

tal que

$$\forall l \in L, \forall m \in M,\ H(f)(<l,m>) = (f(m))(l)$$

- Si $f \neq f' \in {}^{M}({}^{L}K)$, $\exists m \in M$, tal que $f(m) \neq f'(m) \Rightarrow \exists l \in L$ tal que $(f(m))(l) \neq (f'(m))(l)$, por lo tanto $\exists <l,m> \in L \times M$ tal que $H(f)(<l,m>) \neq H(f')(<l,m>))$ por lo tanto $H(f) \neq H(f')$.

- Si $g \in {}^{L\times M}K$, sea $f : M \longrightarrow {}^{L}K$ tal que, si $m \in M$, $f(m) : L \longrightarrow K$, con $f(m)(l) = g(<l,m>)$, $\forall l \in L$. Entonces $H(f) = g$.

vi) Veamos que $M \preceq L \Rightarrow {}^{M}K \preceq {}^{L}K$ $(M \neq \emptyset\ o\ K \neq \emptyset)$

Observación. Si $K = \emptyset$, entonces $M \neq \emptyset$, por lo tanto

$${}^{M}K = \emptyset \preceq {}^{L}K$$

trivialmente. Supongamos pues $K \neq \emptyset$.

Sea $M \underset{g}{\preceq} L$, $a_0 \in K \neq \emptyset$, entonces ${}^{M}K \underset{H}{\preceq} {}^{L}K$ donde

$\forall f \in {}^{M}K$,

$H(f) : L \longrightarrow K$ tal que

$$H(f)(l) = \begin{cases} f(m) & \text{Si } l = g(m) \text{ para algún } m \in M \\ a_0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Obsérvese que si $l = g(m)$ para $m \in M$ tal m es único por la inyectividad de g, de donde $H(f)$ está bien definida.

- Si $f \neq f'$, $\exists m \in M$,tal que $f(m) \neq f'(m)$ por lo tanto $g(m) \in L$ y

$$H(f)(g(m)) = f(m) \neq f'(m) = H(f')(g(m))$$

por lo tanto $H(f) \neq H(f')$.

vii) Supongamos $M \underset{g}{\preceq} L$, entonces ${}^K M \underset{H}{\preceq} {}^K L$ donde

$$\forall\, f \in {}^K M,\ H(f) : K \longrightarrow L \text{ tal que } \forall\, k \in K,\ H(f)(k) = g(f(k)),$$

por lo tanto $H(f) = g \circ f$.

viii) Como ${}^K 2 \sim P(K)$ y $K \prec P(K)$,tenemos $K \prec {}^K 2$, por lo tanto

$$\kappa < 2^\kappa = |\ {}^K 2\ |.$$

Ejemplos en vi) y en vii):

vi) $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ y $\left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} = 2^{\aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0}} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{2^{\aleph_0}}$

$\aleph_0 < c$ pero $(2^c)^{\aleph_0} = 2^{c \cdot \aleph_0} = 2^c = 2^{c \cdot c} = (2^c)^c$

vii) $c < 2^c$ y

$c^{\aleph_0} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c < 2^c = 2^{c \cdot \aleph_0} = (2^c)^{\aleph_0}$

$\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ y $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0}$.

Otros ejemplos:

a) $2 < \aleph_0 \quad \therefore \quad 2^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0}$

$\aleph_0 < c \quad \therefore \quad \aleph_0^{\aleph_0} \leq c^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$

$\therefore \quad \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$

b) $2 < c \quad \therefore \quad 2^c \leq c^c$

$c < 2^c \quad \therefore \quad c^c \leq (2^c)^c = 2^{c \cdot c} = 2^c$

$\therefore \quad c^c = 2^c$

EJERCICIOS

1) $\kappa_1 \leq \kappa_2$ *y* $\lambda_1 \leq \lambda_2 \Rightarrow \kappa_1^{\lambda_1} \leq \kappa_2^{\lambda_2}$

2) Probar que $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$

3) Probar que $c^c = 2^c$ recuérdese que c abrevia $2^{\aleph_0} = |\,\mathbb{R}\,|$.

4) ¿Cuántas funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ hay?

5) Probar lo siguiente:
   a) $\kappa \leq \kappa \cdot \aleph_0$
   b) $\kappa \leq \lambda \Rightarrow 2^\kappa \leq 2^\lambda$
   c) $\lambda < 2^\lambda$
   d) $(\lambda^\mu)^2 = \lambda^{2\mu}$
   e) $\lambda \cdot \aleph_0 \cdot 2 = \lambda \cdot \aleph_0$ (usando que $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$)

6) Para cada cardinal κ existe un cardinal λ tal que $\kappa < \lambda$ y $\lambda^2 = \lambda$
   Sugerencia: Sea $\lambda = 2^{\kappa \cdot \aleph_0}$ y usar el ejercicio 5.

7) Probar que si A tiene un subconjunto numerable, entonces A es infinito.

PENDIENTES CON AXIOMA DE ELECCION:

Las siguientes afirmaciones han quedado pendientes en este capítulo y se probarán con Axioma de Elección.

1) La dominancia es relación total, es decir $\forall\, A, B,\ A \preceq B$ *o* $B \preceq A$.
   COROLARIO. $\forall \kappa, \lambda$ cardinales, $\kappa \leq \lambda$ *o* $\lambda \leq \kappa$.

2) $\forall A$ infinito, $A \times A \sim A$.
   COROLARIO 1. $\forall \kappa$, cardinal infinito, $\kappa \cdot \kappa = \kappa$.

COROLARIO 2. $\forall \kappa, \lambda$ cardinales, al menos uno infinito y el otro no cero,

$$\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \text{máx}\{\kappa, \lambda\}$$

3) $\forall A, A$ infinito $\underset{AE}{\Rightarrow}$ A tiene un subconjunto numerable.

COROLARIO. A infinito $\underset{AE}{\Rightarrow}$ A Dedekind-infinito.

Recordar que: A Dedekind-infinito$\Leftrightarrow$ A tiene un subconjunto numerable.

4 EL AXIOMA DE ELECCIÓN

¿Dada una colección infinita de conjuntos no vacíos, se puede elegir un elemento de cada uno de los conjuntos?

Desde luego supondremos que la colección infinita de conjuntos no vacíos, es un conjunto (de conjuntos no vacíos). Veamos dos ejemplos:

1) Dado un conjunto infinito de conjuntos no vacíos donde cada conjunto no vacío consta de un par de zapatos, el izquierdo y el derecho, ¿Se puede elegir un elemento de cada uno de los conjuntos? La respuesta es clara, sí se puede porque incluso se puede dar una regla: de cada conjunto (que es un par de zapatos), elíjase el zapato izquierdo.

2) Dado ahora un conjunto infinito de conjuntos no vacíos donde cada conjunto consta de un par de calcetines, ¿Se puede elegir un elemento de cada uno de los conjuntos? Aquí la respuesta es diferente; si respondemos que sí, lo haremos sin decir una regla de cómo hacer la elección. Estaremos respondiendo simplemente que existe una elección sin definirla.

Esto último es lo que afirma el llamado Axioma de Elección.

El Axioma de Elección (AE) es una afirmación muy especial en Teoría de Conjuntos, ya que afirma la existencia de algo para lo cual no se da una definición.

DEFINICIÓN. Sea A un conjunto. Una función de elección para A es una función $f : A \longrightarrow \bigcup A$ tal que

$$\forall x \in A \; x \neq \emptyset \; (f(x) \in x)$$

Daremos primero las dos versiones más usuales y sencillas del axioma y luego daremos otras versiones equivalentes.

1. Axioma de elección (AE).

Para todo conjunto de conjuntos no vacíos existe una función de elección; es decir:

$$\forall A\big[\emptyset \notin A \Rightarrow \exists f(f \text{ es función} \wedge dom(f) = A \wedge \forall x \in A(f(x) \in x))\big]$$

2. Axioma de elección conjuntista (AEC).

Para todo conjunto A de conjuntos no vacíos y disjuntos , hay un conjunto que tiene uno y sólo un elemento de cada elemento de A, es decir:

$$\forall A(\emptyset \notin A \wedge \forall z, w \in A(z \neq w \Rightarrow z \cap w = \emptyset) \Rightarrow \exists B\, \forall x \in A(x \cap B \text{ es unitario }))$$

Probaremos la equivalencia entre 1 (AE) y 2 (AEC).

$AE \Rightarrow AEC$

Sea A conjunto de conjuntos no vacíos y disjuntos 2 a 2. Sea f una función de elección para A, entonces $B = f[A]$ es el conjunto buscado, pues $\forall x \in A, f(x) \in x \cap f[A]$ y si $y \in x \cap f[A]$ entonces $y = f(z)$ para algún $z \in A$ y $f(z) \in z$, por lo tanto $y = f(z) \in z \cap x \neq \emptyset$, por lo tanto $z = x$ de donde $y = f(z) = f(x)$. Así pues $\forall x \in A,\ x \cap f[A] = \{f(x)\}$.$\square$

$AEC \Rightarrow AE$

Sea A conjunto de conjuntos no vacíos. Los ajenizamos de la siguiente manera: sea A' tal que $A' = \{w \times \{w\} \mid w \in A\}$; sea B dado por AEC para A', entonces definimos $f : A \longrightarrow \bigcup A$ tal que

$$\forall w \in A,\ f(w) = z \Leftrightarrow < z, w > \in (w \times \{w\}) \cap B$$

$f(w)$ es el elemento izquierdo del único par ordenado de $(w \times \{w\}) \cap B$.$\square$

4.1 ALGUNOS EQUIVALENTES DEL AXIOMA DE ELECCIÓN (AE)

3. AXIOMA DE ELECCIÓN MULTIPLICATIVO (AEM)
El Producto Cartesiano de un conjunto de conjuntos no vacíos es no vacío.

4. AXIOMA DE ELECCIÓN INFINITO (AEI)
Para todo conjunto *infinito* de conjuntos no vacíos, existe una función de elección.

5. AXIOMA DE ELECCIÓN PARA EL CONJUNTO POTENCIA (AEP)
Para todo conjunto A, hay una función F tal que

$$dom(F) = P(A) - \emptyset \ \wedge \ \forall B \subseteq A, F(B) \in B$$

es decir, hay una función de elección para $P(A) - \{\emptyset\}$.

6. AXIOMA DE ELECCIÓN RELACIONAL (AER)
Para toda relación R, hay una función $F \subseteq R$ con $dom(F) = dom(R)$.

DEFINICIÓN. Si $< A, r >$ es COPO, una cadena en A es un subconjunto $C \subseteq A$ tal que $< C, r\,|_C >$ es COTO.

7. LEMA DE ZORN $(ZORN)$
Para todo $< A, r >$ $COPO$ no vacío tal que toda cadena $C \subseteq A$ está acotada superiormente en A (i.e. $\exists b \in A \forall x \in C, \ x \ r \ b \ \vee \ x = b$), hay un elemento $m \in A$ r-maximal en $< A, r >$ (i.e. $\forall y \in A, \ m \ \not r \ y$).

8. LA DOMINANCIA ES TOTAL (DT)
Para cualesquiera A, B conjuntos $A \preceq B \ \vee \ B \preceq A$.

9. Teorema del buen orden (TBO)

Para todo conjunto hay un buen orden, es decir,

$$\forall A \, \exists r \subseteq A \times A \; tal \; que \; < A, r > \; COBO.$$

10. Teorema de Tychonoff (TT)

El producto topológico de espacios compactos es compacto.

Ejercicio. Probar las equivalencias de 1 (AE) con 3 (AEM), 4 (AEI), 5 (AEP) y 6 (AER).

El esquema de equivalencias que consideramos, está representado en la siguiente figura:

$$\begin{array}{cccccc}
 & AEM & AEC & & & \\
 & 3 & 2 & & 9TBO & \\
 & \Updownarrow & \Updownarrow & \nearrow & \Uparrow & \\
AEI4 \Leftrightarrow & 1AE & & \Leftrightarrow & 7ZORN & \Rightarrow \forall A \text{ infinito}, A \times A \sim A \\
 & \Updownarrow & \Updownarrow & & \Downarrow & \\
 & 5 & 6 & & 8DT & \\
 & AEP & AER & & &
\end{array}$$

Proposición 1 (Sin AE). Para todo conjunto finito de conjuntos no vacíos hay una función de elección.

Prueba: Sea A conjunto finito de conjuntos no-vacíos. Entonces A tiene n elementos, para algún $n \in \omega$. Es decir $|A| = n$. Procedemos por inducción sobre $n \in \omega$.

$n = 0$) $A = \emptyset$ y entonces $\emptyset$ es una función de elección para $\emptyset$.

H.I.) Suponemos que para todo conjunto con n conjuntos no vacíos hay una función de elección y sea A tal que $|A| = n + 1$ y $\emptyset \notin A$. Fijemos $c \in A$ y consideremos el conjunto $A - \{c\}$ que tiene n elementos y por lo tanto hay para él una función de elección, digamos g. Como $c \neq \emptyset$ sea

$b \in c$, b cualquiera y entonces definimos $f = g \cup \{< c, b >\}$. Debe ser claro que f es una función de elección para A.□

PROPOSICIÓN 2 (AE). Si $f : A \to B$ es suprayectiva (es decir, $f[A] = B$) entonces existe una función inyectiva de B en A.

Prueba: Sea h una función de elección para $P(A) - \{\emptyset\}$. Definimos $g : B \to A$ tal que $\forall b \in B$,

$$g(b) = h(\{a \in A \mid f(a) = b\}).$$

Es claro que $\forall b \in B$, $\{a \in A \mid f(a) = b\} \neq \emptyset$ ya que f es suprayectiva, por lo que g está bien definida, usando la función de elección h. Es fácil ver que g es inyectiva pues si $b \neq b'$ entonces

$$\{a \in A \mid f(a) = b\} \cap \{a \in A \mid f(a) = b'\} = \emptyset$$

ya que f es una función, de donde $g(b) \neq g(b')$.□

PROPOSICIÓN 3 (AE). La unión numerable de conjuntos numerables es numerable.

Prueba: Sea $S = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ donde $\forall i \in \mathbb{N}$, $|A_i| = \aleph_0$; es decir, $A_i = \{a_{ij} \mid j \in \mathbb{N}\}$ donde $a_{ij} \in A_i$ y es el j-ésimo elemento de A_i en una enumeración de A_i y esto para cada i. Así pues,

$$\bigcup S = \{a_{ij} \mid i, j \in \mathbb{N}\}.$$

Definimos $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup S$ tal que $f(< i, j >) = a_{ij} \in \bigcup S$. Es claro que f es suprayectiva sobre $\bigcup S$ de donde, por la proposición anterior, hay una función inyectiva de $\bigcup S$ en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y de aquí que $\bigcup S \preceq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Ahora, usando que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ tenemos $\bigcup S \preceq \mathbb{N}$.
Por otro lado, como para todo i, $\mathbb{N} \sim A_i \subseteq \bigcup S$, tenemos que $\mathbb{N} \preceq \bigcup S$. De estas dos dominancias, por el teorema de Cantor-Schröder-Bernstein, tenemos que $\bigcup S \sim \mathbb{N}$.□

PROPOSICIÓN 4. $ZORN \Rightarrow DT$.

Prueba: Sean A, B conjuntos cualesquiera.

Sea $E = \{\ f \ \mid f \ \text{ es inyectiva} \wedge dom(f) \subseteq A \ \wedge \ Im(f) \subseteq B\ \}$.

Entonces $< E, \subseteq >$ es $COPO$ no vacío pues $\emptyset \in E$ y toda cadena C en $< E, \subseteq >$ tiene una cota superior en E, que es la unión de la cadena (obsérvese que la unión de una cadena de funciones inyectivas es una función inyectiva y $dom(\bigcup C) \subseteq A$, $Im(\bigcup C) \subseteq B$), así que por $ZORN$ hay un elemento maximal digamos $F \in E$.

Se afirma que $dom(F) = A$ o $Im(F) = B$; pues si $dom(F) \underset{\neq}{\subseteq} A$ y $Im(F) \underset{\neq}{\subseteq} B$, habría un $a \in A - dom(F)$ y un $b \in B - Im(F)$ y entonces

$$G = F \cup \{< a, b >\}$$

es una función inyectiva, $dom(G) \subseteq A$, $Im(G) \subseteq B$, por lo tanto $G \in E$ y $F \underset{\neq}{\subseteq} G$ $\overset{\nabla}{\circ}$ (F es $\subseteq$-maximal); así pues, $dom(F) = A$ o $Im(F) = B$.

- Si $dom(F) = A$, como F es inyectiva, $A \underset{F}{\preceq} B$
- Si $Im(F) = B$, como F es inyectiva, F^{-1} es inyectiva y $dom(F^{-1}) = B$, por lo tanto $B \underset{F^{-1}}{\preceq} A$

Así pues $A \preceq B$ ó $B \preceq A$ y la relación dominancia es total.□

Proposición 5. $ZORN \Leftrightarrow AE$.

Prueba: $\Rightarrow$) Sea A conjunto de conjuntos no vacíos. Sea $E = \{f \mid f \text{ es función} \wedge dom(f) \subseteq A \wedge f(x) \in x, \forall x \in dom(f)\}$. $< E, \subseteq >$ es $COPO$, $E \neq \emptyset$ pues si $x \in A$ y $y \in x \neq \emptyset$ entonces $\{< x, y >\} \in E$, si $A = \emptyset$, $\emptyset \in E$ ($\emptyset$ lo cumple por vacuidad).

Sea C una cadena en $< E, \subseteq >$; entonces $\bigcup C$ es cota superior de C y es una función ya que C es un conjunto compatible de funciones, por ser una cadena.

Claramente $dom(\bigcup C) = \bigcup_{f \in C} dom(f) \subseteq A$ y $\forall x \in dom(\bigcup C)$, $\exists f \in C$ tal que $f(x) \in x$ y $f(x) = (\bigcup C)(x) \in x$. Así, $\bigcup C \in E$.

Por $ZORN$, sea $g \in E$ un elemento $\subseteq$-maximal de E; entonces $dom(g) \subseteq A$ y si $\exists x \in A - dom(g)$, sea $y \in x \neq \emptyset$ y

$g' = g \cup \{< x, y >\} \in E$ y $g \subsetneq g'$(contra la maximalidad de g). Así pues $dom(g) = A$ y $\forall x \in A,\ g(x) \in x$, por lo que g es una función de elección para A.$\square$

$\Leftarrow$) Sea $A \neq \emptyset, < A, r >$ *COPO* tal que toda r-cadena en A tiene una r-cota superior en A.

P.D. A tiene un elemento maximal.

Sea $R = \{D \subseteq A \mid D$ es r-cadena en $A\}, < R, \subseteq >$ *es COPO*.

Obsérvese que:

1) $R \neq \emptyset$ pues si $x \in A \neq \emptyset, \{x\} \in R$. Además $\emptyset \in R$.

2) Si $D \in R$ y x es la $r-$cota superior de D, entonces $x \in A$ y

$D \subseteq x_r = \{y \in A \mid y \underline{r}\ x\}$.

3) Si C es una cadena en R (meta-cadena o cadena de cadenas) entonces $\bigcup C \in R$ obviamente y es cota superior con el orden $\subseteq$.

4)$\forall D \in R, \forall B \subseteq D\,(B \in R)$ (Todo subconjunto de una $r-$cadena en A es una $r-$cadena en A).

Veremos que en$< R, \subseteq >$, cuyas cadenas estan acotadas superiormente por su unión, hay un elemento $\subseteq$-maximal, usando AE.

Si D es un $\subseteq$-maximal en R, entonces x la r-cota superior de D (que existe por hipótesis) es un elemento r-maximal en A, pues si $\exists y \in A(x\ r\ y$ con $x \neq y)$ entonces $D \subsetneq D \cup \{y\} \in R$ $\triangledown\!\!\circ$ (contra la $\subseteq$-maximalidad de D).

Así pues, si R tiene un $\subseteq$-maximal D , entonces $x = r$-cota superior de D es un r-maximal en A. Veamos pues, usando AE que R tiene una cadena $\subseteq$-maximal:

Sea f una función de elección para $P(A) - \{\emptyset\}$ (AE).

Es decir, $f : P(A) - \{\emptyset\} \longrightarrow A = \bigcup P(A)$ y $\forall B \neq \emptyset,\ B \subseteq A$, $f(B) \in B$.

Para cada $D \in R$, sea $\widehat{D} = \{x \in A \mid D \cup \{x\} \in R\} \subseteq A$ ($\widehat{D}$ es el conjunto de elementos de A cuya adjunción a D proporciona

una r-cadena en R). Obsérvese que $D \subseteq \widehat{D}$ y $\widehat{D} - D \subseteq A$.

Observación. $\widehat{D} - D = \emptyset \Leftrightarrow D$ es $\subseteq$-maximal en R.
Sea $g : R \longrightarrow R$ tal que $\forall D \in R$

$$g(D) = \begin{cases} D \cup \{f(\widehat{D} - D)\} & Si\ \widehat{D} - D \neq \emptyset \\ D & Si\ \widehat{D} - D = \emptyset \end{cases}$$

Obsérvese que: $\forall\ D \in R\ \ D \subseteq g(D)$, y $g(D) - D$ es unitario o vacío.

Veamos que hay un $D \in R$ tal que $g(D) = D$; es decir, tal que $\widehat{D} - D = \emptyset$, es decir tal que D es $\subseteq$-maximal en R.

DEFINICIÓN. Sea $J \subseteq R$. J es una *torre* sii

i) $\emptyset \in J$

ii) $D \in J \Rightarrow g(D) \in J$

iii) C es $\underset{\text{(meta-cadena)}}{\subseteq}$-cadena en $J \Rightarrow \bigcup C \in J$

Observaciones

a) Ser torre es ser un conjunto $\{\emptyset\} - \{g, \bigcup_{cad}\}-$ inductivo.

b) R es una torre; cumple i) por observación 1) o 4), ii) por definición de $\widehat{D}$ y de g, y iii) por la observación 3).

c) La intersección de cualquier colección no vacía de torres es torre (obviamente).

d) $J_0 = \bigcap\{J \mid J \text{ es torre}\}$ es torre por c) y b) y es la mínima torre, $J_0 \subseteq R$.

(*)Veamos que: J_0 es una cadena (metacadena), esto bastará pues si J_0 es una cadena, por definición de torre tendremos que por iii): $D = \bigcup J_0 \in J_0$ pero entonces por ii) $g(D) \in J_0$, por lo tanto $g(D) \subseteq \bigcup J_0 = D$. Así $g(D) \subseteq D$ y como siempre $D \subseteq g(D)$, se tiene $g(D) = D$ y $D = \bigcup J_0$ es un $\subseteq$-maximal en R, y así terminamos, sólo resta ver que(*) la torre mínima $J_0 \subseteq R$ es una cadena:

DEFINICIÓN. Sea $C \in J_0, C$ *es comparable* sii $\forall\ D \in J_0$, $D \subseteq C$ ó $C \subseteq D$; es decir, $C \in J_0$ es *comparable* sii C es $\subseteq$-comparable con todas las cadenas de J_0.

Obsérvese que: $\emptyset$ es comparable de J_0 y

$$J_0 \text{ es } \underset{\text{(metacadena)}}{\text{cadena}} \Leftrightarrow \text{Todas las cadenas de } J_0 \text{ son comparables.}$$

Sea $Comp\, J_0 = \{C \in J_0 \mid C \text{ es comparable } \} \subseteq J_0$.

Veamos que $Comp\, J_0$ es una torre y entonces $J_0 \subseteq Comp\, J_0$, de donde todas las cadenas de J_0 son comparables y J_0 es cadena.

i) Ya sabemos que $\emptyset \in J_0$ y que $\emptyset$ es comparable, por lo tanto $\emptyset \in Comp\, J_0$.

ii) Supongamos que $D \in Comp\, J_0$; P.D. $g(D) \in Comp\, J_0$

Sea $U = \{B \in J_0 \mid B \subseteq D \text{ o } g(D) \subseteq B\} \subseteq J_0$ (Recordar que siempre $D \subseteq g(D)$)

U es torre pues:

a) $\emptyset \in U$, ya que $\emptyset \in J_0$ y $\emptyset \subseteq D$.

b) Sea $B \in U$, entonces $B \underset{\neq}{\subseteq} D$ o $B = D$ o $g(D) \subseteq B$.

• Si $B \underset{\neq}{\subseteq} D$, entonces como $D \in Comp\, J_0$ y $g(B) \in J_0$, $g(B) \subseteq D$ o $D \underset{\neq}{\subseteq} g(B)$, pero $D \underset{\neq}{\subseteq} g(B) \Rightarrow B \underset{\neq}{\subseteq} D \underset{\neq}{\subseteq} g(B)$ y $g(B) - B$ es unitario o vacío $\overset{\triangledown}{\circ}$

Así pues $g(B) \subseteq D$ y $g(B) \in U$.

• $B = D \Rightarrow g(B) = g(D)$, por lo tanto $g(D) \subseteq g(B)$ y $g(B) \in U$.

• $g(D) \subseteq B \underset{B \subseteq g(B)}{\Rightarrow} g(D) \subseteq g(B)$ y $g(B) \in U$

Así pues $B \in U \Rightarrow g(B) \in U$.

c) Sea C una cadena en U, entonces C es una cadena en J_0 y $\bigcup C \in J_0$. Ahora, como $\forall B \in C, B \in U$ entonces: $\forall B \in C, (B \subseteq D)$ o $\neg\forall B \in C, (B \subseteq D)$

- Si $\forall B \in C, (B \subseteq D)$ entonces $\bigcup C \subseteq D$ y $\bigcup C \in U$.
- Si $\neg\forall B \in C, (B \subseteq D)$, sea $B_0 \in C$ tal que $g(D) \subseteq B_0 \subseteq \bigcup C$, por lo tanto $\bigcup C \in U$.

Así pues , C cadena en $U \Rightarrow \bigcup C \in U$.

De a), b), c) tenemos que U es una torre, contenida en J_0 la mínima torre, por lo tanto $U = J_0$. Así pues, $H \in J_0 \Leftrightarrow H \in U$ y entonces: $H \subseteq D \subseteq g(D)$ o bien $g(D) \subseteq H$, por lo tanto $g(D) \in Comp\, J_0$.

iii) Es fácil ver que la unión de una $\subseteq$-cadena (metacadena) de conjuntos comparables de J_0 es comparable de J_0: Sea C una cadena. En particular, C es una cadena en J_0 y $\bigcup C \in J_0$. Sea
$H \in J_0 \Rightarrow \forall D \in C\,(D \subseteq H)$ o $\neg\forall D \in C\,(D \subseteq H)$

- Si $\forall D \in C\,(D \subseteq H)$ entonces $\bigcup C \subseteq H$
- Si $\neg\forall D \in C\,(D \subseteq H)$, sea $D_0 \in C$ tal que $H \subseteq D_0 \subseteq \bigcup C$. Así

$$\forall H \in J_0, \bigcup C \subseteq H \text{ o } H \subseteq \bigcup C,$$

por lo tanto, $\bigcup C \in Comp\, J_0$.

Esto termina la prueba de que $Comp\, J_0$ es una torre y por lo tanto $J_0 \subseteq Comp\, J_0$, de donde J_0 es una cadena (*).

De aquí, como ya vimos antes, $D = \bigcup J_0$ es $\subseteq$-maximal en R y de allí como se vió al principio $x = r$-cota sup D (que existe por hipótesis) es un r-maximal en A.□

Proposición 6. $TBO \Rightarrow AE$.

Prueba: Sea A un conjunto de conjuntos no-vacíos. Considero $\bigcup A$. Por TBO, sea $r \subseteq \bigcup A \times \bigcup A$ un buen orden para $\bigcup A$, es decir $< \bigcup A,\ r >$ $COBO$.

Definimos una función de elección para A, $f : A \longrightarrow \bigcup A$ tal que

$$\forall x \in A, f(x) = \text{el mínimo de } x \subseteq \bigcup A\ (x \neq \emptyset).\square$$

Proposición 7. $ZORN \Rightarrow TBO$.

Prueba: Sea A un conjunto, mostraremos que existe r$\subseteq A \times A$ tal que $< A, r >$es $COBO$

Sea $\Lambda = \{< B, r >|\ B \subseteq A, r \subseteq B \times B, < B, r >\ COBO\}$,
$\Lambda \subseteq P(A) \times P(P(P(B)))$

$\Lambda \neq \emptyset$ pues $< \emptyset, \emptyset > \in \Lambda$.
Definimos la relación $\trianglelefteq$ sobre Λ como:
$< B, r > \trianglelefteq < B', r' >$ sii

$$B \subseteq B',\ r \subseteq r' \text{ y } \forall x \in B\ \forall y \in B' - B\ \ < x, y > \in r'$$

es decir, todo elemento de B es r'-anterior a todo elemento de $B' - B$.

i) $\trianglelefteq$ es reflexiva: Sea $< B, r > \in \Lambda$, como $B \subseteq B$, $r \subseteq r$ y $B - B = \emptyset$, se cumple que $< B, r > \trianglelefteq < B, r >$.

ii) $\trianglelefteq$ es antisimétrica: Si $< B, r > \trianglelefteq < B', r' >$ y $< B', r' > \trianglelefteq < B, r > \underset{Def \trianglelefteq}{\Rightarrow} B = B'$, $r = r'$. Por lo tanto $< B, r > = < B', r' >$.

iii) $\trianglelefteq$ es transitiva: Si $< B, r > \trianglelefteq < B', r' >$ y $< B', r' > \trianglelefteq < B'', r'' >$ entonces $B \subseteq B'$ y $B' \subseteq B''$, por lo tanto $B \subseteq B''$; $r \subseteq r'$ y $r' \subseteq r''$ por lo tanto $r \subseteq r''$; $\forall x \in B\ \forall y \in B' - B\ \ < x, y > \in r'$ y $\forall x \in B'\ \forall y \in B'' - B'$ $< x, y > \in r''$. Sea $x \in B$, por lo tanto $x \in B'$. Sea $y \in B'' - B \Rightarrow y \in B'$ o $y \notin B'$ por lo tanto $y \in B' - B$ o $y \in B'' - B'$, por lo tanto $< x, y > \in r' \subseteq r''$ o $< x, y > \in r''$, por lo tanto $< x, y > \in r''$. Entonces $< B, r > \trianglelefteq < B'', r'' >$.

Así pues, $< \Lambda, \trianglelefteq >$ es $COPO$ (en sentido *reflexivo*).
Zornifiquemos a $< \Lambda, \trianglelefteq >$:
Sea $\Gamma = \{< B_i, r_i >\}_{i \in I}$ una cadena en Λ.
Sean $B = \bigcup_{i \in I} B_i$, $r = \bigcup_{i \in I} r_i$. Veamos que $< B, r > \in \Lambda$.
Como $\forall i \in I, B_i \subseteq A$, *es claro que* $B = \bigcup_{i \in I} B_i \subseteq A$
Como $\forall i \in I, r_i \subseteq B_i \times B_i$, *es claro que*

$$r = \bigcup_{i \in I} r_i \subseteq \bigcup_{i \in I} (B_i \times B_i) \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i \times \bigcup_{i \in I} B_i \subseteq B \times B$$

i) r es reflexiva: Sea $x \in B \Rightarrow x \in B_i$ p.a $i \in I \Rightarrow < x, x > \in r_i \subseteq r$.

ii) r es antisimétrica: Sean $< x, y >, < y, x > \in r \Rightarrow < x, y > \in r_i$ y $< y, x > \in r_j$ para algunas $i, j \in I$, pero Γ es cadena en Λ por lo tanto $r_i \subseteq r_j$ ó $r_j \subseteq r_i$ digamos que $r_i \subseteq r_j \Rightarrow < x, y > \in r_j$ y $< y, x > \in r_j$ pero $< B_j, r_j >$ es $COTO$ por lo tanto $x = y$.

iii) r es transitiva: Sean $< x, y >, < y, z > \in r \Rightarrow < x, y > \in r_i$ y $< y, z > \in r_j$ p.a. $i, j \in I \underset{\Gamma \text{ Cadena}}{\Rightarrow}$ S.P.G. $r_i \subseteq r_j$, por lo tanto $< x, y > \in r_j$ y $< y, z > \in r_j \Rightarrow < x, z > \in r_j \subseteq r$ por lo tanto $< x, z > \in r$.

iv) Todo subconjunto no vacío de B tiene mínimo.
Sea $D \subseteq B, D \neq \emptyset \Rightarrow D \cap B_i \neq \emptyset$ para algún $i \in I$ y $D \cap B_i \subseteq B_i$, sea pues b el r_i-mínimo de $D \cap B_i$ en el $COBO < B_i, r_i >$; entonces,

$$\forall y \in D \cap B_i, \ < b, y > \in r_i.$$

Afirmamos que b es el r-mínimo de D en $< B, r >$, pues sea $x \in D$, entonces $x \in B_i$ ó $x \notin B_i$.

i) $x \in B_i \Rightarrow < b, x > \in r_i \subseteq r$.

ii) $x \notin B_i \Rightarrow x \in B_j$ para algún $j \in I$ tal que $B_j \nsubseteq B_i$ ($x \in B_j$, $x \notin B_i$) por lo tanto

$$< B_j, r_j > \ntrianglelefteq < B_i, r_i > \underset{\Gamma \text{ Cadena}}{\Rightarrow} < B_i, r_i > \trianglelefteq < B_j, r_j > .$$

Ahora bien, tenemos que

$b \in B_i$ y
$x \in B_j - B_i$ y
$< B_i, r_i > \trianglelefteq < B_j, r_j > \underset{Def \trianglelefteq}{\Rightarrow} < b, x > \in r_j \subseteq r$

por lo tanto b es el r-mínimo de D, en $< B, r >$.

Así concluimos que $< B, r > \in \Lambda$. Veamos que $< B, r >$ es cota superior de Γ :

Sea $< B_i, r_i > \in \Gamma$. Claramente $B_i \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i = B$ y $r_i \subseteq \bigcup_{i \in I} r_i = r$. Sean $x \in B_i$, $y \in B - B_i$. Ciertamente $y \in B_j$, para algún $j \in I$ tal que $B_j \nsubseteq B_i$ (pues $y \in B_j$ y $y \notin B_i$) así pues, $< B_j, r_j > \ntrianglelefteq < B_i, r_i >$ por lo tanto $< B_i, r_i > \trianglelefteq < B_j, r_j >$ y además tenemos $x \in B_i$ y $y \in B_j - B_i \underset{Def \trianglelefteq}{\Rightarrow} < x, y > \in r_j \subseteq r$ por lo tanto $< B_i, r_i > \trianglelefteq < B, r >$. Así pues, $< B, r >$ es cota superior de la cadena Γ, en Λ.

Así que cualquier cadena en Λ tiene una cota superior en $\Lambda \underset{ZORN}{\Rightarrow} \Lambda$ tiene un elemento maximal $< B_0, r_0 >$. Veamos que $B_0 = A$

$\subseteq$) Trivial ,$< B_0, r_0 > \in \Lambda \Rightarrow B_0 \subseteq A$.

$\supseteq$) Supongamos que $\exists x_0 \in (A - B_0)$ y podemos definir

$$r^* = r_0 \cup \{< y, x_0 >| \, y \in B_0\}$$

donde claramente

$B_0 \underset{\neq}{\subset} B_0 \cup \{x_0\}$, $r_0 \subseteq r^*$ y

$\forall y \in B_0, \forall x \in B_0 \cup \{x_0\} - B_0 = \{x_0\}, < y, x > \in r^*$ y

$< B_0 \cup \{x_0\}, r^* > \in \Lambda$ y

$< B_0, r_0 > \underset{\neq}{\trianglelefteq} < B_0 \cup \{x_0\}, r^* >$ ▽○

Contradiciendo la maximalidad de $< B_0, r_0 >$. Así pues $B_0 = A$ y $< A, r_0 >$ *COBO* y hay un buen orden para A.□

EJERCICIOS

1) Sea A infinito. Sin usar AE, dar un subconjunto numerable de $P(P(A))$.

   Observación. Para probar que A infinito $\Rightarrow$ A Dedekind-infinito, se necesita AE, sin embargo, se puede probar sin AE que: A infinito $\Rightarrow P(P(A))$ Dedekind-infinito, dando un subconjunto numerable de $P(P(A))$, sin usar AE.

2) Probar que la unión numerable de conjuntos numerables es numerable es decir, si $\forall x \in A \, (\mid x \mid = \aleph_0) \; y \; \mid A \mid = \aleph_0$ entonces $\mid \cup A \mid = \aleph_0$. Aclarar en donde se usó AE.

TEOREMA 20 (AE). Para todo conjunto A, A infinito $\Leftrightarrow$ A tiene un subconjunto numerable

Prueba:

$\Leftarrow$) **EJERCICIO**

$\Rightarrow$) (AE) Sea A infinito. Definiremos una función g inyectiva, $g : \omega \longrightarrow A$, de donde $\omega \sim g[\omega] \subseteq A$ y $g[\omega]$ es el subconjunto numerable de A.

La idea es la siguiente: Sea $a \in A \neq \emptyset$ pues es infinito y $g : \omega \longrightarrow A$ tal que

$$g(0) = a$$
$$g(s(n)) = \text{ un elemento de } A - \{g(0), ..., g(n)\}$$

Sea F una función de elección para $P(A)$ (tal F existe por AE), así $\forall B \subseteq A, F(B) \in B$.

Sea $J : \{x \subseteq A \mid fin(x)\} \longrightarrow \{x \subseteq A \mid fin(x)\}$ tal que

$$J(x) = x \cup \{F(A - x)\}.$$

Antes de la g definimos $h : \omega \longrightarrow \{x \subseteq A \mid fin(x)\}$ por recursión para ω:

$$h(0) = \emptyset$$
$$h(s(n)) = J(h(n)) = h(n) \cup \{F(A - h(n))\}.$$

Obsérvese que: $A - h(n) \neq \emptyset$ pues $h(n)$ es finito para toda $n \in \omega$ (por inducción y Propiedad 2 de finitos, sección 3.2) ($A - h(n) = \emptyset$ $\Rightarrow A \subseteq h(n)$ y $fin(h(n))$, por lo tanto $fin(A)$ $\overset{\nabla}{\circ}$)

Obsérvese también que: $m < n \Rightarrow h(m) \subseteq h(n)$ $(*)$

Ahora sí definimos $g : \omega \longrightarrow A$ como :

$$g(n) = F(A - h(n)) = F(A - \{g(0), ..., g(n-1)\}) \text{ , } \forall n \in \omega.$$

Observación. $g(n)$ es el elemento agregado a $h(n)$ para formar $h(n+1)$, por lo tanto $g(n) \in h(n+1)$, además $h(n) \subseteq h(n+1)$. Obsérvese que $g(0) = F(A)$ donde $F(A)$ puede ser o no el a elegido en la idea de la prueba pero es un elemento de A.

Veamos que g es inyectiva:

- Sean $m \neq n$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $m \underset{\in}{<} n$ y $s(m) \leq n$, entonces $g(m) \underset{(Def\ g,h)}{\in} h(s(m)) \underset{(*)}{\subseteq} h(n)$, por lo tanto $g(m) \in h(n)$, pero $g(n) \notin h(n)$ pues $g(n) = F(A - h(n)) \in A - h(n)$ por ser F función de elección.

Por lo tanto $g(m) \neq g(n)$ y así $\omega \underset{g}{\sim} g[\omega] \subseteq A$.□

COROLARIO. A Dedekind-infinito $\Leftrightarrow$ A infinito.

Prueba: A Dedekind-infinito $\Leftrightarrow$ A tiene un subconjunto numerable $\Leftrightarrow$ A infinito.

4.2 MÁS ARITMÉTICA CARDINAL

TEOREMA 21. Si κ es cardinal *infinito* entonces $\kappa \cdot \kappa = \kappa$. Es decir, si A es conjunto *infinito* entonces $A \times A \sim A$.

Prueba: Sea A tal que $\mid A \mid = \kappa$ P.D. $A \times A \sim A$

Sea $H = \{ f \mid B \times B \underset{f}{\sim} B,\ B \subseteq A \text{ y } \mid B \mid \geq \aleph_0 \ \text{ o } f = \emptyset \}$,

$H \neq \emptyset$ pues $\emptyset \in H$

$< H, \subseteq >$ es $COPO$. Aplicaremos Lema de Zorn a $< H, \subseteq >$ para obtener una f maximal en H, es decir Zornificaremos a $< H, \subseteq >$.

Observación. $\forall f \in H, dom(f) = Im(f) \times Im(f)$.

Sea C una cadena en H, entonces $\bigcup C$ es cota superior de C.

- Si $C = \emptyset$, $\bigcup C = \bigcup \emptyset = \emptyset \in H$.

- Si $C = \{\emptyset\}$, $\bigcup C = \bigcup \{\emptyset\} = \emptyset \in H$.

- Si $C \neq \emptyset$ y $C \neq \{\emptyset\}$, $\bigcup C$ es una unión de funciones compatibles por ser C $COTO$ e inyectivas, por lo tanto $\bigcup C$ es inyección.

Sea $B = Im(\bigcup C) = \bigcup\limits_{f \in C} Im(f) \subseteq A$. B es infinito pues

$$\exists f_0 \in C \neq \{\emptyset\}, C \subseteq H,$$

de donde $f_0 \neq \emptyset$ y $\mid Im(f_0) \mid \geq \aleph_0$.

- Veamos que $dom(\bigcup C) = B \times B$

$\subseteq$) $dom(\bigcup C) = \bigcup\limits_{f \in C} dom(f) = \bigcup\limits_{f \in C} [Im(f) \times Im(f)]$

$$\subseteq \bigcup_{f \in C} Im(f) \ \times \ \bigcup_{f \in C} Im(f) = B \times B$$

$\supseteq$) Sea $< b_1, b_2 > \in B \times B \Rightarrow b_1 \in Im(f_1), b_2 \in Im(f_2)$ con $f_1, f_2 \in C$, y como C es $COTO$ podemos suponer s.p.g. $f_1 \subseteq f_2$, por lo tanto

$< b_1, b_2 > \in Im(f_2) \times Im(f_2) = dom(f_{2)} \subseteq \bigcup\limits_{f \in C} dom(f) = dom(\bigcup C)$.

Así pues $dom(\bigcup C) = B \times B$ y $Im(\bigcup C) = B$, por lo tanto

$$B \times B \underset{\bigcup C}{\sim} B \ \text{ y } \bigcup C \in H.$$

Por lo tanto en cualquier caso, $\bigcup C \in H$ es cota superior de C.

Por ZORN, sea f_0 maximal en H.

- $f_0 \neq \emptyset$ pues como A es infinito, tiene un subconjunto numerable $B_1 \subseteq A$ (AE) y como $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$, hay una biyección g tal que $B_1 \times B_1 \underset{g}{\sim} B_1$ de donde $g \in H$ y $\emptyset \underset{\neq}{\subseteq} g$, por lo tanto $f_0 \neq \emptyset$, pues f_0 es maximal.

- Así , hay un B_0 infinito, $B_0 \subseteq A$ tal que $B_0 \times B_0 \underset{f_0}{\sim} B_0$

Sea $\lambda = \mid B_0 \mid$, λ es infinito y $\lambda \cdot \lambda = \lambda$, por lo tanto

$$\lambda = \mid B_0 \mid \underset{(B_0 \subseteq A)}{\leq} \mid A \mid = \kappa$$

es posible $B_0 \underset{\neq}{\subseteq} A$ pero veremos que $\lambda = \kappa$, es decir que $B_0 \sim A$.

Para ver que $\mid B_0 \mid = \lambda = \kappa = \mid A \mid$, veamos que $\mid A - B_0 \mid < \lambda$, pues con eso tendríamos :

$$\begin{aligned}\kappa = \mid A \mid = \mid B_0 \cup (A - B_0) \mid = \mid B_0 \mid + \mid A - B_0 \mid \\ \leq \lambda + \lambda = 2 \cdot \lambda \underset{(2 < \lambda)}{\leq} \lambda \cdot \lambda = \lambda \leq \kappa\end{aligned}$$

de donde $\lambda = \kappa$ y como $\lambda \cdot \lambda = \lambda$, tendríamos $\kappa \cdot \kappa = \kappa$.

Veamos pues que $\mid A - B_0 \mid < \lambda$.(Usaremos reducción al absurdo y DT.)

Supongamos que $\lambda \leq \mid A - B_0 \mid$, por lo tanto $B_0 \underset{h}{\preceq} A - B_0$ y $D = h[B_0] \subseteq A - B_0$ con $\mid D \mid = \mid B_0 \mid = \lambda$, es decir, $A - B_0$ tiene un subconjunto D tal que $\mid D \mid = \lambda$.

Daremos una extensión propia de f_0, contradiciendo así su maximalidad.

Obsérvese que $B_0 \cap D = \emptyset$ pues $D \subseteq (A - B_0)$.

Sabemos que $B_0 \times B_0 \underset{f_0}{\sim} B_0$ (1)

$(B_0 \cup D) \times (B_0 \cup D) = (B_0 \times B_0) \cup [(B_0 \times D) \cup (D \times B_0) \cup (D \times D)]$ (2)

Ahora bien:

$$|(B_0 \times D) \cup (D \times B_0) \cup (D \times D)| \geq \lambda \quad \text{y}$$

$$|(B_0 \times D) \cup (D \times B_0) \cup (D \times D)| =$$

$$\lambda \cdot \lambda + \lambda \cdot \lambda + \lambda \cdot \lambda = \lambda + \lambda + \lambda = 3 \cdot \lambda \underset{(3 < \lambda)}{\leq} \lambda \cdot \lambda = \lambda$$

por lo tanto es igual a λ y $\exists\, g$ biyección tal que:

$$(B_0 \times D) \cup (D \times B_0) \cup (D \times D) \underset{g}{\sim} D \quad (3)$$

Así, por (1), (2), (3) tenemos que:

$$(B_0 \cup D) \times (B_0 \cup D) \underset{f_0 \cup g}{\sim} (B_0 \cup D) \subseteq A$$

(Como $B_0 \cap D = \emptyset$, f_0 y g son compatibles) por lo tanto $f_0 \cup g \in H$, entonces $f_0 \underset{\neq}{\subset} f_0 \cup g$ $\overset{\nabla}{\circ}$ (Contra la maximalidad de f_0).

Así pues $\lambda \not\leq |A - B_0|$, por lo tanto $|A - B_0| < \lambda$ pues la dominancia es total (AE).□

COROLARIO 1. Sean κ, λ cardinales; uno infinito y el otro no cero. Entonces,

$$\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \text{máx}\{\kappa, \lambda\}$$

Prueba: supongamos s.p.g. que $\lambda \leq \kappa$, por lo tanto κ infinito y $\lambda \neq 0$, entonces

$$\kappa \leq \kappa + \lambda \underset{(\lambda \leq \kappa)}{\leq} \kappa + \kappa \underset{\text{Prop.}\overline{\text{V}}\text{ Prod.}}{\leq} \kappa \cdot \kappa \underset{\kappa \text{ infinito}}{=} \kappa \underset{\lambda \neq 0}{\leq} \kappa \cdot \lambda \underset{(\lambda \leq \kappa)}{\leq} \kappa \cdot \kappa = \kappa$$

por lo tanto $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \text{máx}\{\kappa, \lambda\}$.□

COROLARIO 2. Si $A \subseteq B, B$ infinito y $|A| < |B|$ entonces $|B - A| = |B|$.

Prueba:

$$|B| = |(B-A)\cup A| = |B-A| + |A| \underset{*}{=} \{|B-A|, |A|\}$$

(*)**Observación.** Si $|A|$ infinito, ya. Si no, $|A|$ finito $\Rightarrow |B-A|$ infinito (pues $B = A\cup(B-A)$) Entonces como máx$\{\,|B-A|, |A|\,\}$ $= |B|$, y como $|A| < |B|$ se tiene $|B-A| = |B|$.□

EJEMPLOS $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ y $|\mathbb{Q}| = |\omega| = \aleph_0 < 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}| = \mathbf{c}$, por lo tanto $|\mathbb{R}-\mathbb{Q}| = |\mathbb{R}|$. El cardinal de los irracionales es $\mathbf{c}$.

$|\{x\in\mathbb{R} \mid x \text{ es algebraico}\}| = |\omega| = \aleph_0 < \mathbf{c} = |\mathbb{R}|$ por lo tanto $|\{x\in\mathbb{R}\mid x \text{ es trascendente}\}| = |\mathbb{R}|$. El cardinal de los trascendentes es $\mathbf{c}$.

Observación. Sabemos que los cardinales forman un orden total por AE.

SUPOSICIÓN. Supondremos (se puede probar) que los cardinales además forman un buen orden.

Con esa suposición, damos la siguiente

DEFINICIÓN. Si κ es cardinal infinito, κ^+ es el menor de los cardinales mayores que κ. Obsérvese que $\forall\,\kappa\,\exists\,\lambda\,(\kappa<\lambda)$.

Así $\kappa^+ = \text{mín}\{\lambda \mid \lambda > \kappa\} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\kappa < \lambda \Rightarrow \kappa^+ \leq \lambda$.

En particular, como $\lambda < 2^\lambda$ (Teo. Cantor) entonces $\lambda^+ \leq 2^\lambda$.

COROLARIO 3. Si $\lambda \geq \aleph_0$ y $2 \leq \kappa \leq \lambda$ entonces $2^\lambda = \kappa^\lambda = \lambda^\lambda = (\lambda^+)^\lambda$.

Prueba: $2 \leq \kappa \leq \lambda < \lambda^+ \leq 2^\lambda$, por lo tanto

$$2^\lambda \leq \kappa^\lambda \leq \lambda^\lambda \leq (\lambda^+)^\lambda \leq (2^\lambda)^\lambda = 2^{\lambda\cdot\lambda} \underset{\text{(TEO)}}{=} 2^\lambda$$

Así pues, $2^\lambda = \kappa^\lambda = \lambda^\lambda = (\lambda^+)^\lambda$, para todo λ infinito y $2 \leq \kappa \leq \lambda$.

EJEMPLOS

$\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = 8^{\aleph_0} = n^{\aleph_0}, \ \forall n \in \omega.$

$\aleph_1^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$

$\mathbf{c}^{\mathbf{c}} = 2^{\mathbf{c}} = \aleph_0^{\mathbf{c}} = \aleph_1^{\mathbf{c}} = \aleph_2^{\mathbf{c}}$

COROLARIO 4. Si A es infinito, hay una partición $A = A_1 \cup A_2$ donde $| A_1 | = | A_2 | = | A |$.

Prueba: Ejercicio.

COROLARIO 5. Si A es un conjunto infinito, hay una partición de A en $| A |$ subconjuntos de A ajenos dos a dos, y cada uno de cardinal $| A |$.

Prueba: Sea $\kappa = | A |$, como $\kappa \cdot \kappa = \kappa$, $\exists f \ (A \times A \underset{f}{\sim} A)$

Obsérvese que $A \times A = \bigcup\limits_{z \in A} (A \times \{z\})$

$\forall b \in A$, sea $A_b = f[A \times \{b\}] = \{f(< y, b >) \mid y \in A\}$, y sea

$P = \{A_b \mid b \in A\}$ entonces

$\forall b \in A, \ A_b \subseteq A$ y

i) $\forall b \in A, A_b \neq \emptyset$ (Si $a \in A, f(< a, b >) \in A_b$)

ii) $\forall b, b' \in A$, si $b \neq b'$, $A_b \cap A_{b'} = \emptyset$, $x \in A_b \cap A_{b'} \Rightarrow$ $x = f(< a, b >)$ para alguna a, $x = f(< a', b' >)$ para alguna a', pero $< a, b > \neq < a', b' >$pues $b \neq b'$ $\overset{\bigtriangledown}{\circ}$ contra la inyectividad de f.

iii) $\bigcup\limits_{b \in A} A_b = \bigcup\limits_{b \in A} f[A \times \{b\}] = \bigcup\limits_{b \in A} \{f(< y, b >) \mid y \in A\} \underset{f \, biy.}{=} A$

Por lo tanto P es una partición de A, además

iv) como $b \neq b' \Rightarrow A_b \neq A_{b'}$ tenemos que $| P | = | A |$

v) $\forall b \in A, | A_b | = | A |$, pues $A_b \underset{g}{\sim} A$ donde $g(f(< y, b >)) = y$

- $f(< y, b >) \neq f(< y', b >) \underset{f \ función}{\Rightarrow} < y, b > \neq < y', b >$, por lo tanto $g(f(< y, b >)) = y \neq y' = g(f(< y', b >))$

- Si $y \in A$ entonces $< y, b > \in A \times A$ y $f(< y, b >) \in A_b$ y

$$g(f(< y, b >)) = y.\square$$

MEDITACIÓN. Todo proceso de elección para el cual se cumplan dos hechos: que el número de elecciones a realizar es infinito y que no se pueda definir de modo general cómo se efectúan esa infinidad de elecciones, carece de justificación teórica, aunque se crea posible. El Axioma de Elección es necesario.

EJERCICIOS

1) Pruebe el Corolario 4.
2) Dar explícitamente una partición de $\mathbb{N}$ en $\aleph_0$ subconjuntos ajenos de $\mathbb{N}$, cada uno de cardinal $\aleph_0$.
3) Dar ejemplos μ, λ, κ cardinales infinitos tales que:
   a) $\mu < \lambda$ y $\kappa^\mu < \kappa^\lambda$
   b) $\mu < \lambda$ y $\kappa^\mu = \kappa^\lambda$
   c) $\mu < \lambda$ y $\mu^\kappa < \lambda^\kappa$
   d) $\mu < \lambda$ y $\mu^\kappa = \lambda^\kappa$
4) Si $\kappa \leq \mid A \mid$ y A es infinito, ¿Cuántos subconjuntos de A, de cardinal κ, hay?
   Sugerencia Definimos $[A]^k = \{B \subseteq A \mid\mid B \mid = \kappa\}$, la pregunta es $\mid [A]^k \mid =$? Si $\kappa = \mid K \mid$ y $f : K \to A$ entonces $\mid f \mid = \kappa$ y $f \subset K \times A$.
5) Probar la equivalencia de las siguientes dos afirmaciones: ¿Se necesita AE?
   a) $\forall S \subseteq \mathbb{R}[S \prec \mathbb{N} \text{ o } S \sim \mathbb{N} \text{ o } S \sim \mathbb{R}]$ i.e. S es finito o S es numerable o S es del cardinal de $\mathbb{R}$
   b) $\nexists Y[\mathbb{N} \prec Y \text{ y } Y \prec \mathbb{R}]$.
6) Sea A un conjunto infinito. Probar la equivalencia de las siguientes dos afirmaciones:
   a) $\forall S \subseteq P(A)[S \prec A \text{ o } S \sim A \text{ o } S \sim P(A)]$.
   b) $\nexists Y[A \prec Y \text{ y } Y \prec P(A)]$.

¿Se necesita AE?

7) Para todo cardinal infinito κ, probar la equivalencia de las siguientes dos afirmaciones:
   a) $\forall\,\lambda \leq 2^{\kappa}\ [\lambda \leq \kappa \text{ o } \lambda = 2^{\kappa}]$.
   b) $\nexists\lambda\ [\kappa < \lambda \ \text{ y } \lambda < 2^{k}]$.

UN EXAMEN SOBRE EL AXIOMA DE ELECCIÓN

El Axioma de Elección es una afirmación muy especial porque asegura la existencia de algo (un conjunto de elección o una función de elección o un buen orden) para lo cual **no** se da una definición. La disyuntiva sobre si se necesita o no el Axioma de Elección debe ser clara: si se puede definir de algún modo la elección, ésta existe y el axioma no es necesario. Si no se puede definir de ningún modo la elección, el axioma es necesario para justificar que la elección existe. Pruébese el lector a sí mismo: ¿cuándo el Axioma de Elección es realmente necesario? Las respuestas serán "si"o "no"en cada caso.

Si usted está trabajando en la teoría de conjuntos Zermelo-Fraenkel **sin** el Axioma de Elección, **¿puede usted elegir un elemento de ...**

1. un conjunto finito?
2. un conjunto infinito?
3. cada miembro de un conjunto infinito de conjuntos unitarios?
4. cada miembro de un conjunto infinito de pares de zapatos?
5. cada miembro de un conjunto infinito de pares de calcetines?
6. cada miembro de un conjunto finito de conjuntos si cada uno de los miembros es infinito?
7. cada miembro de un conjunto infinito de conjuntos si cada uno de los miembros es finito?
8. cada miembro de un conjunto infinito de conjuntos de racionales?
9. cada miembro de un conjunto numerable de conjuntos si cada uno de los miembros es numerable?
10. cada miembro de un conjunto infinito de conjuntos finitos de reales?

11. cada miembro de un conjunto infinito de conjuntos si cada uno de los miembros es infinito?
12. cada miembro de un conjunto numerable de conjuntos si cada uno de los miembros es infinito?
13. cada miembro de un conjunto infinito de conjunto de reales?
14. cada miembro de un conjunto infinito de conjuntos de dos elementos cuyos miembros son conjuntos de reales?

4.3 UNA APLICACIÓN DEL LEMA DE ZORN

Todo Espacio Vectorial V tiene una base.

Sea β la familia de conjuntos de vectores de V linealmente independientes, es decir

$$\beta = \{x \subseteq V \mid x \text{ es conjunto de vectores linealmente independientes}\}$$

Sea C una cadena en $< \beta, \subseteq >$ $COPO$. $\bigcup C$ es una cota superior y claramente es un conjunto de vectores linealmente independientes pues $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \bigcup C \Rightarrow \exists x \in C(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in x)$, por ser C cadena. Así pues $\bigcup C \in \beta$.

Por ZORN, hay un maximal $\beta_0 \in \beta$ y entonces β_0 es un conjunto linealmente independiente que genera a V, pues:

Si $\alpha \notin \beta_0$, hay $b_1, ..., b_n \neq 0, a$ y $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \beta_0$ tales que $\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + ... + \alpha_n b_n + \alpha a = 0$, por lo tanto $a \neq 0$ $(a = 0 \Rightarrow \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + ... + \alpha_n b_n = 0$ $\overset{\nabla}{\circ}$). Así pues, como $a \neq 0$ tenemos:
$\alpha_1 \frac{b_1}{-a} + \alpha_2 \frac{b_2}{-a} + ... + \alpha_n \frac{b_n}{-a} = \alpha$, por lo tanto α es generado por $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \beta_0$.

Así pues, β_0 es una base para V.□

Únicamente a manera de ejemplificar la gran importancia del Axioma de Elección en diversas áreas de la matemática, mencionaremos varios teoremas importantes de diversas ramas matemáticas en cuya prueba es necesario usar el Axioma de Elección en alguna de sus

formas equivalentes:

1) Cualquier unión numerable de conjuntos numerables, es numerable.

2) Todo conjunto infinito tiene un subconjunto numerable.

3) Para todo cardinal infinito κ, $\kappa \cdot \kappa = \kappa$; en Aritmética Cardinal Transfinita.

4) Todo espacio vectorial tiene una base; en Álgebra Lineal.

5) Teorema de Tychonoff, el producto topológico de espacios compactos es compacto; en Topología.

6) Teorema de Compacidad; de Lógica Matemática.

7) Teorema de Lowenheim-Skolem-Tarski; de Lógica Matemática.

8) El Teorema del Ideal Maximal; en Álgebra.

9) El Teorema del Ultrafiltro; en Álgebras de Boole.

10) El Teorema de Hahn-Banach, en Análisis Funcional.

Algunos de los teoremas anteriores son en realidad, equivalentes al Axioma de Elección; es sorprendente la cantidad de versiones equivalentes muy distintas, que existen del AE. Algunos otros, son "más débiles", es decir el AE los implica, pero ellos **no** implican al AE; estos se conocen como Formas Débiles del Axioma de Elección.

Bibliografía

[Bolzano B.] Las Paradojas del Infinito, Mathema, 1985.

[Cantor Georg] Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers, Dover, 1955.

[Crossley J. et al] What is Mathematical Logic?, Dufdod University, 1972.

[Devlin K.] The Joy of Sets: fundamentals of contemporary set theory, Springer Verlag, 1993.

[Enderton H. B.] Elements of Set Theory, Academic Press, 1977.

[Hernández F.] Teoría de Conjuntos, Aportaciones Matemáticas No. 13, SMM, 1998.

[Hrbacek K. Jech T.] Introduction to Set Theory, Marcel Dekker Inc., 1984.

[Kamke E.] Theory of Sets, Dover, 1950.

[Malitz J.] Introduction to Mathematical Logic Part I: an introduction to Set Theory, Springer Verlag, 1984.

Teoría de conjuntos para estudiantes de ciencias,
editado por la Facultad de Ciencias de la
Universidad Nacional Autónoma de México,
se terminó de imprimir el 30 de julio de 2011

. en los talleres de Tipos Futura, S. A. de C. V.
Francisco González Bocanegra No. 47-B, Colonia Peralvillo,
Delegación Cuauhtémoc. C. P. 06220, México, D. F.

El tiraje fue de 500 ejemplares.

Está impreso en papel cultural de 90 grs.
En su composición se utilizó tipografía Computer modern
de 12:14 y 16:18 puntos de pica.
Tipo de impresión: offset.

El cuidado de la edición estuvo a cargo de
Mercedes Perelló Valls